EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

14e JAARGANG 1938, Nr. 4.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

☛ Bij de verzending van pres. ex. van de *tweede* druk (thans derde) van de Schooltafel is een prosp. van ongeveer 3 blz. bijgevoegd. Men zal mij zeer verplichten met toezending van dat prosp.; noch de uitgever, noch ik, hebben een ex. meer. P. W.

INHOUD.

werd hij een baanbreker, en een der allergrootsten, en wordt zijn naam met eere genoemd naast die van Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace, Lambert, en d'Alembert.

De hierboven door ons genoemde jaren (1765—1780), en men kan er gerust nog een jaar of tien aan toevoegen, stonden in het teeken van de Analyse; de Algebra, en de Analyse, zwaaiden den scepter, en de belangstelling voor de Meetkunde was gering. Nu was de aanleg van Monge als volgt: hij hanteerde de analytische methoden als de beste, maar op den bodem van zijn ziel lag altijd zijn belangstelling voor de Meetkunde, voor den vorm, voor scheppingen van den geest die, zij het ook uitsluitend met het geestesoog, aanschouwd kunnen worden, en hier was hij waarlijk wel „tot de tanden gewapend", want naast zijn reeds genoemden, buitengewonen aanleg voor lijnteekenen, bezat hij een phenomenaal voorstellingsvermogen, zoodat hij met oppervlakken en ruimtekrommen, en alles wat daarmee samenhangt, even gemakkelijk en zeker werkte als een ander met een figuur, die hij vóór zich heeft liggen.

Monge besloot nu, en ook dit moet geschied zijn in Mézières, tusschen 1765 en 1770, en met het doel om op waardige wijze zijn intrede te doen in het Rijk der toenmalige Mathesis, de Analyse te gaan toepassen op de Meetkunde; en hij deed dit op de hem eigene, volmaakt oorspronkelijke, wijze, en betrad daarmede een gebied, dat nog nauwelijks betreden was, ja, waar nog niemand anders den voet gezet had dan Euler. Euler en Monge, ziehier de grondleggers der Differentiaalmeetkunde; maar Monge veel meer dan Euler. Want Euler had wel is waar in een verhandeling uit het jaar 1771 uitermate belangrijk pionierswerk gedaan, maar als het ware meer incidenteel, terwijl Monge van de Differentiaalmeetkunde een „corps de doctrine" gemaakt heeft, waarbij hij op het werk van Euler *niet* steunt. Wij komen hierop terug.

Ieder weet dat Monge de „vader der Beschrijvende Meetkunde" is; het schaadt niemand, als hij er bij weet dat hij, en misschien met nog meer recht, de „vader der Differentiaalmeetkunde" genoemd mag worden, althans van die in de ruimte; en dat daar, waar de ontwikkelingsgeschiedenis der differentiaalvergelijkingen uiteen wordt gezet, zijn naam onafgebroken genoemd wordt naast die van de allergrootsten, Euler en Lagrange;

want platte gronden en opstanden zijn bijna zoo oud als het menschdom, en geteekend, en geconstrueerd is er door alle eeuwen heen, zoodat de vraag zelfs gewettigd is wat er dan eigenlijk door Monge anders geworden is; maar Differentiaalmeetkunde bestònd er vóór Monge niet; deze is een schepping van *zijn* geest. Geen wonder dan ook, dat Lagrange eens uitgeroepen moet hebben: „avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces, ce diable d'homme sera immortel (Cantor's „Vorlesungen" IV, p. 624). Lagrange heeft goed gezien!

Het gaat hier om twee verhandelingen, beide geschreven te Mézières. De eerste is in 1771 aangeboden aan de fransche Akademie van Wetenschappen, en draagt den titel: „Mémoire sur les Développées, les Rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure"; zij is echter pas in 1785 in het 10e deel van de „Mémoires présentés par divers Savants", p. 511—550, gepubliceerd, en is later door Monge als laatste hoofdstuk toegevoegd aan zijn „Feuilles d'Analyse".

De titel geeft voldoende den inhoud weer. Trekt men in alle punten van een vlakke kromme de normalen, dan omhullen deze een andere vlakke kromme, de zoogenaamde *evoluut,* en het is Monge alweer die ons geleerd heeft deze, en in het algemeen alle omhullenden, te vinden. In de vergelijking der normaal zit nl. een parameter, en indien men naar dezen differentieert, en hem dan elimineert, dan heeft men de vergelijking der omhullende of „enveloppe", zooals het door Monge ingevoerde woord luidt. Deze bewerking, die in de Differentiaalrekening altijd en altijd weer wordt toegepast, is te danken aan Monge; zij is een van de steeds terugkeerende bewerkingen uit de „Feuilles d'Analyse".

Zoo schijnt het dus, dat een vlakke kromme slechts één evoluut heeft, en er zijn inderdaad, zelfs tegenwoordig, nog menschen genoeg die dit gelooven; maar het tegendeel is het geval. Iedere kromme, vlak of niet, heeft oneindig veel evoluten. Dit is het, wat Monge in zijn „Mémoire" aantoont.

Hij gaat daarbij uit van een doodeenvoudige figuur, nl. een cirkel met zijn „as" (het woord is van Monge), d.w.z. de loodlijn, in het middelpunt opgericht op zijn vlak. De cirkel heeft slechts één as, maar een willekeurige kromme, vlak of niet, heeft er oneindig veel. En deze liggen alle op een zeker oppervlak, dat ontwikkelbaar is, d.w.z. uit te spreiden in een plat vlak „sans

rupture ni duplicature", dus zonder breken noch kreukelen; en op dit oppervlak liggen de evoluten, en zijn daar zelfs geodetische, d.w.z. kortste, lijnen, zoodat zij experimenteel gevonden zouden kunnen worden door het opwikkelen van een steeds strak gespannen draad (Monge staat steeds, ook bij zijn meest abstracte onderzoekingen, met beide voeten op den grond, speurt steeds naar experimenten en practische toepassingen, bijv. in de schilderkunst, de architectuur, den vestingbouw, en is dan ook, als geen tweede, bevoegd over deze dingen mee te spreken, wat men niet van alle groote wiskundigen kan zeggen!). De evoluten van een vlakke kromme liggen op den cylinder, die de gewone, vlakke, evoluut tot basiskromme heeft, en welks beschrijvende lijnen op het vlak der kromme loodrecht staan.

Ten slotte heeft Monge het nog over de „développée" van een ontwikkelbaar oppervlak zelf. Dit is een ander ontwikkelbaar oppervlak, dat wij tegenwoordig het „rectificeerende" noemen, (bijv. de cylinder, waarop een schroeflijn ligt); wordt de ruimtekromme met dit oppervlak afgewikkeld, dan gaat zij over in een rechte lijn. Monge drukt zich eenigszins anders uit, maar dat doet er nu niet toe.

V. Kommerell, die in Cantor IV, p. 531 deze verhandeling eveneens bespreekt, zegt er van: „Schon dieses erste Werk zeigt alle Vorzüge von Monge's Darstellungsweise, vor allem eine eminente Sicherheit des räumlichen Anschauungsvermögens. Dazu kommt eine ungemeine Eleganz in der Beweisführung, und eine staunenswerte Gewandtheit in der analytischen Formulierung differential-geometrischer Beziehungen."

6. De tweede groote verhandeling stamt uit het jaar 1775, is eveneens aangeboden aan de fransche Akademie, en eveneens afgedrukt in de „Mémoires présentés par divers Savants", maar nog vóór de eerste, nl. in 1780, deel IX, p. 593—624. Zij heeft tot titel: „Sur les Propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles des Surfaces développables, avec une Application à la Théorie des Ombres et des Pénombres". Monge haalt daarin zijn eigen, vroegere, verhandeling aan, maar tevens die van Euler: „De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet", dus: „over de lichamen, wier oppervlak in een plat vlak uitgespreid kan worden", uit het jaar 1771, en waarin Euler zich o.a. eveneens bezig houdt met het vraagstuk van de schadu-

wen en halfschaduwen; maar waarvan M o n g e zegt: „je suis parvenu à des résultats, qui me semblent beaucoup plus simples."

De verhandeling van E u l e r is anders belangrijk genoeg. Ten eerste drukt hij daarin voor de eerste maal de coördinaten x, y, z van de punten van een oppervlak uit als functies van 2 parameters t en u, op welke voorstellingswijze later G a u s s, in zijne beroemde „Disquisitiones generales circa superficies curvas", uit het jaar 1827, de geheele Differentiaalmeetkunde der gebogen oppervlakken gegrondvest heeft, en in de tweede plaats geeft hij de voorwaarden aan, waaraan een oppervlak heeft te voldoen om in een plat vlak uitgespreid te kunnen worden, uitgaande van de definitie, dat dit mogelijk is indien bij elkaar behoorende oneindig kleine driehoekjes van het platte vlak en het oppervlak congruent zijn.

Hij heeft nog een tweede studie geschreven over de Differentiaalmeetkunde, maar deze stamt pas uit het jaar 1782, dus één jaar vóór zijn dood. De titel luidt: „Methodus facilis symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi", en zij vormt den grondslag van onze moderne theorie der ruimtekrommen; voor de eerste maal wordt hier de boog s als onafhankelijk veranderlijke ingevoerd, en wordt de spherische afbeelding uiteen gezet.

Het stuk van M o n g e is alweer verwerkt in zijn „Feuilles d'Analyse", en brengt het grondkarakter daarvan tot uitdrukking, veel meer dan de verhandeling over de evoluten.

De, uitermate vruchtbare, grondgedachte is de volgende. Iedere klasse van oppervlakken heeft een bepaalde definitie, die deze oppervlakken bepaalt, en alle andere uitsluit. Weet men deze definitie uit te drukken in de teekens der Algebra, dan heeft men voor alle oppervlakken van die klasse de karakteriseerende vergelijking gevonden. Daarbij is het voordeelig, de oorspronkelijke definitie desnoods zóódanig te vervormen, dat zij een eigenschap van het raakvlak uitdrukt.

Is nl. de vergelijking van een oppervlak gegeven in den vorm:

$$z = f(x, y),$$

dan luidt die van het raakvlak:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

X, Y, Z zijn de loopende coördinaten, x, y, z die van het raakpunt,

en $p = \frac{\delta z}{\delta x}$, $q = \frac{\delta z}{\delta y}$ de waarden van de partieele afgeleiden van z naar x en y in het raakpunt. Kan men nu voor een geheele klasse van oppervlakken een deze oppervlakken karakteriseerende eigenschap van het raakvlak aangeven, dan wordt deze uitgedrukt door een vergelijking tusschen x, y, z, p, q:

$$F\ (x, y, z, p, q) = 0,$$

en dit is dan de partieele differentiaalvergelijking van de eerste orde voor de geheele klasse.

Nemen wij, ter illustratie, de twee simpelste voorbeelden, waarbij wij echter den lezer instantelijk verzoeken wel te willen bedenken dat Monge het allerminst bij deze laat!

Een cylinder, van welken aard ook, is gekarakteriseerd door de eigenschap, dat hij oneindig vele rechte lijnen bevat die alle evenwijdig loopen aan een vaste rechte. Maar dit is geen eigenschap van het raakvlak. Daarom zegt Monge: een cylinder is gekarakteriseerd door de eigenschap dat al zijn *raakvlakken* evenwijdig loopen aan een vaste rechte. Laat nu de richtingscosinussen der vaste rechte zich verhouden als $a : b : 1$, dan verhouden zich die van de normaal op het raakvlak als $p : q : -1$; en als nu het raakvlak *evenwijdig* moet zijn aan de lijn $a : b : 1$, dan moet de normaal op het raakvlak er loodrecht op staan, en de voorwaarde voor den loodrechten stand is:

$$ap + bq - 1 = 0;$$

dus is:

$$ap + bq = 1$$

de differentiaalvergelijking van alle cylinders ter wereld, want deze vergelijking bevat niets waardoor een bijzondere cylinder gekarakteriseerd zou zijn.

Maar nu kan men iets geheel anders doen. De vergelijkingen van een willekeurige rechte in de ruimte zijn:

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta;$$

a en b bepalen de richting, α en β het snijpunt met het XOY-vlak, want voor $z = 0$ vindt men $x = \alpha$, $y = \beta$. Wil men nu een cylinder hebben, dan moet men het punt (α,β) een willekeurige kromme laten doorloopen:

$\beta = \varphi(\alpha)$, met φ willekeurig, en vindt dan in $y - bz = \varphi(x - az)$, of zoo men liever wil:
$x - az = \psi(y - bz)$, of desnoods:
$f(x - az, y - bz) = 0$
de vergelijking van alle cylinders. Deze bevat nu wel degelijk een element, dat den cylinder individualiseert, nl. de willekeurige functie φ, ψ, of f.

Elk van de laatste drie vergelijkingen is de algemeene integraal van $ap + bq = 1$, maar daarmede is deze vergelijking geïntegreerd langs een omweg, en niet rechtstreeks. Monge geeft echter ook wel degelijk, nl. in de „Addition" van de „Feuilles", een zeer persoonlijke integratiemethode, nl. de methode der „karakteristieken", en over deze moeten wij in de volgende § een enkel woord meedeelen.

7. Komt in de coëfficienten van de vergelijking $f_{(x, y, z)} = 0$ van een oppervlak een parameter α voor, dan stelt deze vergelijking niet één oppervlak, maar een stel ∞^1 voor, nl. al naar gelang van de waarde van α. Snijdt men nu een bepaald oppervlak van dit stel (α = een bepaalde constante) met het oppervlak:

$$\frac{\delta f}{\delta \alpha} = 0,$$

dan is de doorsnede, zooals Monge heeft aangetoond, de limiet van de doorsnijding van dit oppervlak met een naburig, en deze kromme noemt hij de *karakteristiek*. En de m.pl. van al die karakteristieken, die men vindt door uit $f = 0$ en $\frac{\delta f}{\delta \alpha} = 0$ de α te elimineeren, is de omhullende of enveloppe.

Nu weet Monge uit de differentiaalvergelijking rechtstreeks de vergelijkingen der karakteristiek af te leiden, en komt dan tot volmaakt dezelfde simultane vergelijkingen, die men bereikt langs de methode Charpit—Lagrange, maar die hier langs meetkundigen weg zijn afgeleid, en dus ook alle een aanschouwelijke beteekenis hebben.

Zeggen wij nu ook nog een enkel woord over de kegels met den top in O. Deze ontstaat door een rechte, die steeds door O gaat, te laten glijden langs een willekeurige kromme, maar met het oog op de differentiaalvergelijking zeggen wij liever dat hij gekarakteriseerd is door de eigenschap dat het raakvlak in ieder punt x, y, z door O gaat.

Zal het raakvlak:

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y)$$

steeds door O gaan, dan moet steeds:

$$z = px + qy$$

zijn, zoodat dit de differentiaalvergelijking is.

Anderzijds is $x = az$ een lijn door O in het XOZ-vlak, $y = bz$ een in het YOZ-vlak; en zullen deze twee lijnen de projecties zijn van een beschrijvende lijn van den kegel, dan moet er een betrekking bestaan tusschen a en b, bijv.:

$$\varphi\,(a, b) = 0;$$

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

is dus de vergelijking van een willekeurigen kegel met den top in O, en tevens de algemeene integraal van de differentiaalvergelijking:

$$z = px + qy.$$

De volledige titel van de „Feuilles" is: „Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie, à l'usage de l'Ecole polytechnique, publiées la première année de cette école" (an 3 de la République), d.w.z. 1794. Wij hebben uit den inhoud nu al het een en ander meegedeeld, maar mogen nog een paar andere dingen onder geen voorwaarde onvermeld laten.

De eerste drie, uitvoerige, paragrafen omvatten vrijwel de geheele Analytische Meetkunde van het platte vlak en de rechte lijn in de ruimte, en wel in een vorm, die klassiek geworden is, zoodat wij kunnen zeggen dat wij allen deze dingen uit die eerste drie paragrafen geleerd hebben, al hebben wij ze natuurlijk nooit gezien, want zij zijn uiterst zeldzaam.

Met § 4 begint het onderzoek der oppervlakken: cylinders, kegels, omwentelingsoppervlakken, regelvlakken wier beschrijvende lijnen altijd horizontaal zijn en altijd de z-as snijden, oppervlakken die oneindig veel andere omhullen, met hunne karakteristieken en „keerkromme" (arête de rebroussement; arête = graat, rebroussement = ommekeer), kanaaloppervlakken, bovenal de ontwikkelbare oppervlakken; dan de ontdekking der kromtelijnen op een oppervlak, de bepaling van deze op de drieassige ellipsoïde (met prachtige figuren), en hunne eenvoudige

constructie door middel van een hulpkegelsnede; de oppervlakken, wier beide hoofdkromtestralen gelijk zijn en gelijk gericht (bol), of gelijk, maar tegengesteld gericht (de minimaaloppervlakken van Lagrange); partieele differentiaalvergelijkingen van de 2e orde, geïntegreerd door hunne karakteristieken, ($rt - s^2 = 0$ voor de ontwikkelbare oppervlakken, $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$ voor de minimaaloppervlakken, enz.), zelfs partieele vergelijkingen van de derde orde, de theorie der evoluten van de ruimtekrommen, in de „Addition" de integratie van de partieele vergelijking van de 1e orde, alsmede constructies betreffende de beroemde vergelijking van de trillende snaar, waarmede alle beroemdheden uit dien tijd zich bezig hielden . . . . genoeg, een over-rijke inhoud, magistraal voorgedragen, overal langdradige berekeningen vermijdend, maar lang niet altijd gemakkelijk te volgen.

Toen Monge in 1780 de stad Mézières intermitteerend verliet, om in het Louvre hydraulica te gaan doceeren, openden zich voor hem meteen de poorten der „Académie française", werd hij als Lid geïnstalleerd, en daarmede gequalificeerd als een der vooraanstaande mathematici van Frankrijk.

8. In 1789 brak de Revolutie uit, door den hartstochtelijken jongen van de „troffel" begrijpelijkerwijze met enthousiasme begroet, en daarmede begint het heroïsche tijdperk in het leven van onzen held, als het geoorloofd is het zoo te noemen. Uit de stilte van zijn leven als geleerde en docent treedt hij in het rumoerige openbare, en in plaats van werkzaam te zijn in het belang van een betrekkelijk kleine schare van leerlingen, stelt hij zijn alomvattende gaven en kundigheden in dienst van zijn geheele volk.

Op 10 Augustus 1792 wordt hij Minister van Marine in het tweede Ministerie Rolland, maar dit was helaas geen succes. Het oordeel der historici over zijn werkzaamheid als zoodanig is ongunstig, en het doet ons mathematici pijnlijk aan, te lezen van den „onbekwamen Minister Monge". Voor een goed minister worden andere hoedanigheden vereischt dan groote geleerdheid, en groot paedagogisch talent. Hij wilde dan ook 12 Februari 1793 alweer aftreden, maar moest, om welke reden is mij onbekend, dit besluit opschorten tot 10 Mei 1794, toevallig juist zijn verjaardag. Maar weer in het gewone leven terug gekeerd, wijdt hij zich met alle kracht, door de daad, in woord, en in geschrift, aan het heil van zijn volk, zooals wij in de Inleiding reeds verteld hebben,

ten einde zijn ontredderd vaderland naar vermogen weer op de been te helpen. Het waren echter niet alleen de geschut- en kruitfabrieken, die zijn belangstelling hadden.

Overtuigd dat slechts kundigheden op alle gebied in staat waren het land te redden, kwamen Monge en enkele andere vooraanstaande mannen in onderlinge besprekingen op het denkbeeld een zeer eigenaardige school te stichten, „destinée à régénérer l'instruction publique, anéantie sous le règne de la terreur"; een school, niet bestemd voor jeugdige leerlingen, maar integendeel voor hunne leermeesters, voor de „instituteurs, et les hommes cultivant les Sciences et les Lettres", een school die een „pépinière" moest worden voor de docenten uit geheel Frankrijk; zij werd opgericht bij decreet van den 9en brumaire an 3 (30 October 1794), en ontving den naam van „Ecole normale". 1500 leerlingen uit geheel Frankrijk werden uitgekozen om het onderwijs te volgen, en wel nooit zal een onderwijsinrichting zulk een schitterenden staf van docenten bezeten hebben.

De zuivere Wiskunde was in handen van de beide grootmeesters Lagrange en Laplace, de Beschrijvende Meetkunde in die van Monge, met de beide „professeurs adjoints" Lacroix en Hachette. Hier dus, en in 1795, kreeg Monge, na ongeveer 30 jaar te hebben moeten wachten, de gelegenheid met zijn Beschrijvende Meetkunde voor het voetlicht te treden. De mondelinge voordrachten, ook voor de andere vakken, werden gehouden in het amphitheater van den Jardin des Plantes, en in de Sorbonne waren groote teekenzalen in gereedheid gebracht voor de practische oefeningen.

De Natuurkunde werd gedoceerd door Hauy, de Scheikunde door Berthollet; de Natuurlijke Historie door Daubenton. Verder was er een hoogleeraar voor de Agriculture, waren er 3 voor de Geographie en de Geschiedenis, en eveneens 3 voor de Grammatica, de Literatuur, en de Moraal, waaronder Bernardin de St. Pierre.

9. De „Ecole normale" heeft slechts bestaan gedurende de eerste vier maanden van 1795. Misschien was zij wel een weinig overhaast, en met te véél enthousiasme, en te weinig overleg en koele berekening, opgericht, wellicht ook schortte het aan de geldmiddelen, want elk van de 1500 uitverkoren leerlingen kreeg uit de staatskas een zekere toelage; bovendien droeg zij m.i. uit den aard

der zaak een tijdelijk karakter. Hoe dit zij, zij verdween, maar werd op den voet gevolgd door een andere inrchting, nog vóór de Ecole normale geconcipieerd, en die dus langer gelegenheid gehad had om te rijpen, nl. de „Ecole polytechnique", die méér levensvatbaarheid bezat, die heden ten dage nog bestaat, en vooral in de dagen van Monge den roem van Frankrijk uitmaakte. „Ancien élève de l'Ecole polytechnique" was een eeretitel, dien geen van de oud-leerlingen zich liet ontgaan, en die nooit op het titelblad hunner werken ontbreekt. Zij is het prototype geworden van alle technische hoogescholen ter wereld, en in de dagen van Monge doceerden er ongeveer dezelfde mannen als aan de Ecole normale, in elk geval Lagrange, Laplace, en Berthollet; haar doel was, op te leiden tot wetenschappelijk ingenieur-officier.

Monge was er weer de ziel van, zooals hij ook de ziel geweest was van de Commissie van voorbereiding, en het leerplan had opgesteld en uitgewerkt. Het onderwijs begon met 400 leerlingen, ditmaal jonge lieden, maar overigens gekozen op de wijze van de Ecole normale. De 50 meest gevorderden werden vereenigd in een voorbereidende school, om er hulpkrachten bij het onderwijs van te maken, en dezen werden zoo goed als geheel gevormd door Monge alleen. Den ganschen dag was hij bij hen, zooals hij vroeger den geheelen dag in de geschutgieterijen doorbracht, afwisselend onderwijs gevende in Meetkunde en Analyse; en 's avonds schreef hij aan zijn „Feuilles d'Analyse", ter voorbereiding van zijn toekomstige lessen, zooals hij vroeger geschreven had aan zijn boek over de vervaardiging van het kanon.

De Ecole polytechnique was zijn ooilam; voor haar was geen moeite of opoffering hem te groot, en éénmaal heeft hij haar zelfs van den ondergang gered. Wij deelen dit hier mede, omdat het past in het verband, maar moeten dan even een 10 jaar overspringen.

Monge werd, wij zullen verderop zien hoe dat kwam, vereerd dóór, ja was eigenlijk door hechte vriendschapsbanden verbonden mèt, Napoleon, en had een onbegrensde bewondering voor diens genie. Toen nu Napoleon zich in 1804 tot keizer liet kronen, was dit voor den republikein Monge een bittere pil; maar zijn bewondering en liefde voor den man waren zóó groot, dat hij zich in het onvermijdelijke schikte. Maar de studenten der Ecole polytechnique weigerden hardnekkig, Napoleon als

keizer te erkennen, en hierop antwoordde deze met het dreigement, de school te zullen sluiten en opheffen. Toen sprong Monge voor zijn leerlingen in de bres, en vroeg een particuliere audiëntie bij den Keizer aan, die hem natuurlijk verleend werd. „Zoo, Monge", sprak Napoleon, toen Monge binnen trad, „uw leerlingen weigeren dus, mij te erkennen"?

„Sire," antwoordde Monge, „zij hebben groote moeite gehad om republikeinen te worden; geef hun den tijd, dan worden zij óók nog wel imperialisten".

Dit antwoord beviel den Keizer, en het gevaar was afgewend; maar de toelage werd ingetrokken, er werd integendeel in het vervolg een vrij hoog lesgeld geheven.

10. Wij keeren terug tot de eerste 10 of 15 levensjaren van de Ecole polytechnique, de glansperiode in het leven van Monge, toen hij in de School met zijn Beschrijvende Meetkunde en zijn Analyse triomfen vierde, en in den lande een persoon van gewicht was, aan wien belangrijke functies werden toevertrouwd. Hij was lid van de Commissie, die het menschdom een op rationeele basis steunend stelsel van maten en gewichten moest schenken, en hij werd naar Italië gezonden om de keuze te leiden van de schilderijen en beeldhouwwerken, die door Italië aan Frankrijk waren afgestaan, en naar Parijs gezonden zouden worden. „Afgestaan bij plechtig verdrag", voegt Brisson er voor alle zekerheid maar bij, maar wij weten natuurlijk wel hoe het hiermee gesteld was: het verdrag was door den overwinnaar den overwonnene gewoonweg gedicteerd.

Heeft Monge niet gevoeld dat hier eenvoudig roof gepleegd werd? Wij vermoeden van niet, anders had zijn onkreukbaar rechtvaardigheidsgevoel hem wel belet deze functie waar te nemen. Ondanks alles was toch ook hij een kind van zijn tijd, die op deze dingen een anderen kijk had dan wij, en anderzijds was hij, die zoo hevig geleden had onder de rampspoeden van zijn vaderland, van bewondering en liefde vervuld voor den jeugdigen generaal, die bezig was Frankrijk weer groot te maken; wat die deed, was welgedaan.

In Italië leerde hij den generaal kennen, en beide mannen, die elkaärs grootheid voelden, werden geleidelijk aan verbonden door een band van hechte vriendschap, die van weerszijden nooit verflauwd is. Hij werd door den opperbevelhebber uitgekozen om het

vredesverdrag van Campo-Formio over te brengen naar het Directoire te Parijs, en was daarna onder de eersten, die de expeditie naar Egypte meemaakten; ook Berthollet ging mee.

Hij stichtte in Caïro het „Institut d'Egypte", naar het voorbeeld van het „Institut de France" te Parijs, de wis- en natuurkundige afdeeling van de fransche Akademie, en werd aangewezen als deszelfs eerste president. Hij bezocht twee keer de pyramiden, zag de groote muren van Heliopolis, en zocht en bestudeerde alle antiquiteiten die hij maar vinden kon. In de woestijn zag hij eens het verschijnsel der luchtspiegeling, der fata morgana, en hij slaagde er in het door de omgekeerde opeenstapeling van luchtlagen van verschillende temperatuur te verklaren.

In Parijs terug gekeerd, werd hij Senator, en „Comte de Péluse".

11. De jaren van glorie gingen voorbij, en het noodlottige jaar 1812 brak aan. Toen Monge het bericht las van de débâcle in Rusland, kreeg hij van schrik een beroerte. Maar hij herstelde zich, en gedurende de fameuze „honderd dagen" vinden wij hem weer aan de zijde van Napoleon. Maar toen deze voor goed van het tooneel verdween, was er ook voor Monge in Frankrijk geen plaats meer; ook zijn tijd was afgeloopen, hij was tè zeer gecompromitteerd. Lichamelijk noch geestelijk was hij de oude meer, en toen hem het decreet bekend werd (21 Maart 1816), waarbij hij en Carnot uit de Akademie gestooten werden, verviel hij in een toestand van apathie, van wezenloosheid, waaruit hij niet meer ontwaakt is. En zoo is hij dan, na meer dan 2 jaren in dezen toestand gebleven te zijn, den 18en Juli 1818 heengegaan, geestelijk afwezig; een benijdenswaardig einde, want was het verstand hem gelaten, hij zou niet anders gekend hebben dan leed.

„La régularité du service n'a pas permis qu'une jeunesse généreuse vînt, à l'heure de ses funérailles, déposer la palme de la reconnaissance et des regrets sur la tombe de leur premier bienfaiteur", zegt Delambre. Dat is natuurlijk onzin; bij zulke gelegenheden onderbreekt men juist den regelmatigen gang van den dienst! De waarheid is eenvoudig, dat de regeering niet wilde, dat er van de begrafenis van den in ongenade gevallene notitie genomen zou worden. Maar zij kon niet verhinderen dat, „dès l'aurore qui suivit le jour des derniers devoirs, les élèves s'acheminèrent en silence vers le lieu de la sépulture, et y déposèrent un rameau de chêne, auquel ils suspendirent une couronne de laurier".

En 23 oudleerlingen, allen inwoners van Douai, richtten een schrijven tot B e r t h o l l e t, om hem te verzoeken een inschrijving te willen openen voor een gedenksteen. Dát is dan het standbeeld op het stemmige, vreedzame pleintje te Beaune.

12. Rest ons nog van de „Géométrie descriptive" een bespreking te geven, die aan het karakter en de beteekenis van het werk niet àl te veel geweld aandoet, wat niet zoo heel gemakkelijk is.

Reeds moet iets gezegd worden over den naam, dien M o n g e gekozen heeft; want de der zake volmaakt onkundige zou licht kunnen meenen, dat er in de Beschrijvende Meetkunde slechts gekeuveld wordt, terwijl het doel juist omgekeerd is, nl. het daadwerkelijk uitvoeren van constructies in de ruimte door middel van constructies in platte vlakken, die de constructies in de ruimte ondubbelzinnig bepalen. Maar het werkwoord „beschrijven" heeft ook bij òns tweeërlei beteekenis; want wanneer wij een cirkel „beschrijven", dan houden wij er geen voordracht over, maar teekenen hem. De naam „darstellende Geometrie", die bij de Duitschers in zwang is, geeft het karakter onzer wetenschap veel beter weer.

M o n g e is de „vader der Beschrijvende Meetkunde", maar hoe kan men met goed fatsoen de vader zijn van een kind, dat er reeds was ten tijde van de Grieken, ja misschien al tijdens den bouw der Egyptische pyramiden, een 3000 jaar v. C.? Want het is toch nauwelijks aan te nemen dat die reusachtige gevaarten zoo maar uit het hoofd, zonder werkteekeningen, gebouwd zijn, en de aanwezigheid van projectieteekeningen bij de Grieken en de Romeinen staat vast. Zij hadden er zelfs aparte namen voor, noemden den plattegrond de „Ichnographie", van ἴχνος, voet, dus een projectie op het vlak waarop de voet staat, en den opstand de „Orthographie", van ὄρθος, rechtop, dus de projectie op een vlak dat rechtop staat.

De geweldige kathedralen der middeleeuwen, een dom te Keulen, of te Straatsburg, of te Reims, of een Notre-Dame te Parijs, met hun uiterst ingewikkelde structuur, en hunne gecompliceerde gewelven, zijn zonder teekeningen eenvoudig ondenkbaar, en het is dan ook inderdaad bekend genoeg, dat er in de bouwkeeten hevig geconstrueerd werd. Zelfs had iedere keet in den regel haar eigen geheimen, en haar eigen methoden voor het behouwen der steenen en balken, voor de „coupe des pierres et des bois, ou Stéréotomie";

wat bleef er dan voor M o n g e nog te doen over? De constructies uit de Beschrijvende Meetkunde van vóór Monge berustten niet, of slechts gebrekkig, op mathematische grondslagen, omdat de ontdekkers er van geen mathematici, maar practici, bouwmeesters waren, die van de constructieve projectieleer een even gebrekkig verstand hadden als de schilders van de perspectief. De constructies waren door de ervaring verkregen en, althans de goede er onder, hadden door den tijd hun deugdelijkheid bewezen, want de kathedralen, die er mee gebouwd waren, „stonden", en de gewelven stortten niet in. Zij zullen dus ten deele wel goed, ten deele ook wel verkeerd, of maar half goed, of maar binnen zekere grenzen bij benadering goed geweest zijn.

Men moet hier niet te gering over denken; immers hoeveel bedrijven zijn er niet die uitnemende resultaten bereiken, en wier procédé's toch op niets anders dan op de ervaring berusten, overgeleverd van vader op zoon. Maar indien zulk een bedrijf, laat ons zeggen door de Chemie, op een wetenschappelijke basis gezet wordt, dan openen zich te voren ongekende, en ook onkenbare, mogelijkheden, eenvoudig omdat de procédé's zooveel beter worden.

Zoo nu stonden de zaken bij de oude Beschrijvende Meetkunde. De procédé's waren zoo zoo, de resultaten, de bouwwerken, goed genoeg, maar zij zelve had nooit (met haar zuster de perspectief) de grondslag kunnen worden voor een alles omvattende Ruimteleer, daarvoor ontbrak haar het wetenschappelijk fundament. De Beschrijvende Meetkunde moest gemathematiseerd worden, en dàt heeft M o n g e gedaan; van *deze* Beschrijvende Meetkunde is hij onbetwist de „vader".

Dat M o n g e zelf dit, ondanks zijn 20 jaren, duidelijk voelde, en dat hetgeen wij hierboven schreven, juist is, volgt uit een uitlating van hem zelf. Verreweg het beste werk dat over de Stereotomie geschreven is, in 4 dikke deelen, elk van honderden bladzijden, en met tal van lithografieën, was van A m é d é e F r a n ç o i s F r é z i e r (1682—1773), officier-ingenieur, en een groot man in den lande. M o n g e had dit werk terdege bestudeerd, maar maakt in zijn groote verhandeling van 1775: „Sur les propriétés etc." (vgl. § 6 van deze Hist. Studie) toch terloops de opmerking dat aan den „auteur de la coupe des pierres", en hiermede is zonder twijfel F r é z i e r bedoeld, het verschil tusschen ontwikkelbare en niet-ontwikkelbare regeloppervlakken toch eigenlijk niet

recht duidelijk was! Dit teekent den toestand, en wie dit goed in zich opneemt, begrijpt eens vooral, waarom M o n g e de vader der Beschrijvende Meetkunde is.

13. Wij weten (vgl. §§ 8 en 9) dat M o n g e zijn Beschrijvende Meetkunde, maar eveneens zijn Analyse, voor het eerst voordroeg aan de Ecole normale en de Ecole polytechnique, en wij weten ook dat vóór dien tijd de Analyse de opperheerschappij voerde. Het bewijs hiervoor vinden we bij F r é z i e r, die op p. IX van de Voorrede van het eerste deel van zijn groote werk mismoedig uitroept: „Je sais bien, qu'aujourd'hui la géométrie linéaire n'est plus guères à la mode, et que pour se donner un air de science, il faut faire parade de l'analyse."

F r é z i e r kon hierin geen verandering brengen, hiervoor was een grootere noodig, maar dezen gelukte het dan ook bij tooverslag. En, merkwaardig genoeg, ondanks zich zelf. Hij zelf kon het immers niet helpen, dat hij een hartstochtelijk, soms àl te hartstochtelijk man was; dat hij in zijn voordrachten zijn enthousiasme niet wist te beteugelen, en hierdoor zijn toehoorders in vervoering bracht. Hij zelf kon het niet helpen dat zijn persoonlijke invloed honderdmaal grooter was dan die van zijn toch waarlijk niet minder geniale collega's L a g r a n g e en L a p l a c e; bovendien kon hij zijn aard niet veranderen. Hij was een groot mathematicus, maar in hart en nieren geometer. Alles was Meetkunde voor hem, en zelfs zijn meest abstracte onderzoekingen over het integreeren van de partieele differentiaalvergelijkingen hebben een meetkundigen ondergrond, en dragen een meetkundig gewaad. En zóó is het dan geschied, dat door zijn invloed de Meetkunde als bij tooverslag in het middelpunt van de belangstelling kwam te staan, en hij de stichter geworden is van een school, waaruit de grootste geometers, een L a c r o i x, B r i s s o n, H a c h e t t e, B r i a n c h o n, D u p i n, zelfs een P o n c e l e t, en tal van anderen, zijn voortgekomen. Wandelt men de wegen, die geleid hebben tot de ontzagwekkende ontwikkeling der Beschrijvende, der Projectieve, der Differentiaalmeetkunde, in omgekeerden zin, dan komt men steeds bij hèm terecht, ook wat de begrippen, en zelfs de benamingen betreft. Hij is, als het geoorloofd is een beeld uit het spoorwegwezen te gebruiken, een knooppunt, van waaruit tal van internationale lijnen hun oorsprong nemen.

14. Ook de „Géométrie descriptive" is voor de eerste maal verschenen in losse bladen: „Géométrie descriptive. Leçons données à l'Ecole normale, l'an 3 de la République. Publiées d'abord en Feuilles, d'après les sténographes." De mondelinge lessen waren dus door stenographen opgenomen, en daarna persklaar gemaakt. Deze oeruitgave, en ook de beide volgende moeten, àls ze nog bestaan, wel heel zeldzaam zijn; de 4e daarentegen is antiquarisch nog wel eens te krijgen. Zij is verzorgd door den neef B. Brisson, natúúrlijk „Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique," maar tevens „Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées," en stamt uit het jaar 1820, toen de beroemde schrijver dus al 2 jaar overleden was. Zij opent met een „Avertissement de l'éditeur," waarin Brisson allerlei aanhaalt wat de groote astronoom Delambre van Monge gezegd heeft in de „Analyse des travaux de l'Académie des Sciences pendant l'année 1818," en dit op *zijn* beurt ontleend heeft aan de „Notice historique sur Gaspard Monge" van Brisson zelf, en de „Essai historique sur les Services et les Travaux scientifiques de Gaspard Monge" van Charles Dupin.

Brisson vertelt dan verder, dat hij in de nagelaten papieren, die de weduwe hèm ter hand gesteld heeft, de „Leçons, données à l'Ecole normale et recueillies par les sténographes" terug gevonden heeft, en dat er daar 4 onder waren die nog niet gepubliceerd waren: één over schaduwbeschrijving, één over de zoogenaamde luchtperspectief, of het aanbrengen van tinten op de perspectivische teekeningen, één over de lineaire perspectief, of het meetkundig construeeren der perspectivische teekeningen, en één over de voordeelen van het invoeren der Beschrijvende Meetkunde bij het openbaar onderwijs in het geheele land. Hij heeft de eerste drie, omgewerkt, aan het slot van het boek toegevoegd, in twee hoofdstukken, maar zij vormen geenszins het belangrijkste deel van het werk.

Nu komt de schrijver zelf aan het woord. Allereerst geeft hij, in slechts 3 bladzijden druks, zijn beroemd geworden „Programme," wat op zich zelf al een prestatie genoemd mag worden in een tijd, toen Inleidingen van twintig, dertig pagina's geen zeldzaamheid waren; maar iedere zin is dan ook de moeite waard gelezen te worden, ook thans nog, en het geheel heeft in geenen deele nog slechts historische waarde. Zoo mogen de Franschen ook thans

INHOUD VAN DEEL I

156 bladzijden; 21 figuren; geb. ƒ 2,25.

INHOUD VAN DEEL II.

204 bladzijden; 50 figuren; geb. ƒ 2,25.

Nauwkeurige studie van de programma's van vele Gymnasia en Lycea heeft opgeleverd, dat aan die scholen in de klassen I—IV de inhoud wordt onderwezen van de delen I en II van de Nieuwe Schoolalgebra. Met deze beperking evenwel: $y = ax^2 + bx + c$ en $ax^2 + bx + c = 0$ met alles wat er om en aan hangt (deel II § 39—53) worden wel behandeld, maar niet zo, of er blijft nog wel een en ander te doen, hetzij in omvang, hetzij in diepte of in beide. De stof van de genoemde paragrafen is nodig, al zal men bij eerste kennismaking allicht een derde deel ter zijde laten.

Alle programma's noemen de oneigenlijke machten en de logarithmen; zodat alleen de reeksen uit deel II niet aangeroerd worden.

Voor de klassen Vα en VIα ziet men genoemd: vierkantsvergelijkingen meer uitgebreid; zie boven. En verder vergelijkingen, die er toe herleid worden (enkele programma's noemen die ook) nl. irrationale vergelijkingen, wederkerige vergelijkingen en andere. Genoemd worden dan ook de imaginairen en andere onderwerpen (gebroken functies, reststelling) uit de inhoud van IIIα, die men hieronder ziet.

NIEUWE SCHOOLALGEBRA IIIα

82 bladzijden 29 figuren . . . . *f* 1.—

INHOUD.

Nauwkeurig hebben we de Mondelinge examens Staatsexamens A door Dr. Schamhardt [1]) nagegaan. Uiteraard lopen die parallel met de α-opleiding van het Gymnasium en Lyceum; **ook voor de α's Staatsexamen heeft men genoeg aan**

NIEUWE SCHOOLALGEBRA I, II en IIIα

Het enige, dat deze boeken teveel hebben voor α, zijn de reeksen (II § 71—76), waarbij we echter opmerken, dat er scholen zijn, waar men er wat aan doet; de enkele bladzijden over limieten zijn de behandeling waard; onder de mondelinge staatsexamensvragen treffen we er ook een paar aan (waarschijnlijk echter, omdat de candidaat kennis er van verraadde; in zo'n geval ziet men ook bij andere examens wel eens vragen, die buiten het raam vallen).

Waar de splitsing in α en β bij de 5e klas begint, is het alleszins gerechtvaardigd (al hebben dan de α's 20 blz. niet nodig) voor alle klassen I—IV van de Gymnasia en Lycea te volgen

NIEUWE SCHOOLALGEBRA I en II

en voor de klassen Vα en VIα het kleine boekje IIIα.

De leerlingen van de H.B.S. en de β's van Gymnasia en Lycea hebben de reeksen wel nodig; zodat het niet mogelijk is het anders te schikken, dan dat de α's enige paragrafen van deel II overslaan; economisch is een deel II zonder de reeksen naast het bestaande niet verantwoord.

Voor de β's van Gymnasia en Lycea kunnen we kort zijn; die hebben na deel II **deel III nodig; geheel; maar voldoende is dat ook.**

Men zal goed doen zich, wat de „analyse" betreft, dezelfde beperking op te leggen, als wij, toen we blz. 153—195 van deel III schreven.

---

[1]) Dr. H. C. Schamhardt Mondelinge Staatsexamen A 1936, 20 blz. 100 vragen over Meetkunde, 125 over Algebra.

INHOUD VAN DEEL III.

199 bladzijden; 69 figuren; geb. *f* 2,25.

Aan het slot dus:

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, echter zonder de reeksen

Vα en VIα Nieuwe Schoolalgebra IIIα

Vβ en VIβ Nieuwe Schoolalgebra III

Staatsexamen

Voor α De delen I, II, IIIα

Voor β De delen I, II, III.

P. WIJDENES.
Dr. H. J. E. BETH.

nog wel eens hooren, en het ook apprecieeren, dat zij in de gelukkige omstandigheid verkeeren van ongeveer alles, wat zij noodig hebben, te vinden in eigen land, en in overvloed (men bedenke, dat het „Programme" begint met den beroemden zin: „Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, etc."), en zoo doet het ook thans nog niemand kwaad weer eens te hooren dat „le charme qui les (nl. de studie der natuurverschijnselen) accompagne, pourra vaincre la répugnance que les hommes ont en général pour la contention d'esprit, et leur faire trouver du plaisir dans l'exercice de leur intelligence, que presque tous regardent comme pénible et fastidieux", inspannend en vervelend. Het wil ons voorkomen, dat de afkeer van geestelijke inspanning, waarover Monge zich beklaagt, in die 150 jaren bij het gros van het menschdom nog niet veel minder is geworden!

Monge noemt hier de Beschrijvende Meetkunde o.a. „l'art de décrire les objets". Over het woord „décrire" kunnen wij ons, na hetgeen we hierover in § 12 reeds gezegd hebben, niet meer verwonderen, en het woord „art", en ook „artiste", dat hij herhaaldelijk gebruikt, moeten natuurlijk opgevat worden in den ruimsten zin. „Sous ce point de vue, c'est une langue nécessaire à l'homme de génie qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties".

15. De „Géométrie descriptive" is natuurlijk allerminst een leerboek der Beschrijvende Meetkunde voor de middelbare school! Als zoodanig was zij immers ook niet bedoeld; want al zegt de schrijver op p. 110: „Mais nous ne devons pas écrire seulement pour les élèves des écoles secondaires, nous devons écrire pour leurs professeurs", voor de middelbare school was het niveau veel te hoog; hij zag over het hoofd dat niet alle jongens van 12—18 jaar Monge's zijn! Het was een neerslag van de mondelinge lessen, bedoeld voor begaafde jongelieden, die al een zwaar toelatingsexamen achter den rug hadden, en dat dezen er Meetkunde uit geleerd hebben, is in het vervolg gebleken!

Het werk bestaat uit 5 Afdeelingen, maar slechts de eerste 4 vormen de eigenlijke Beschrijvende Meetkunde. Aan het einde er van (p. 110) zegt de schrijver zelf: „Ce que nous avons vu, jusqu'à présent, de la Géométrie descriptive, considérée d'une manière

abstraite, contient les principales méthodes dont on peut avoir besoin dans les arts." En dan een eind verder, door ons eenigszins verkort: „Men moet in het onderwijs slechts eenvoudige dingen opnemen, en van dagelijksch gebruik. Maar als nu een „artiste" eens een moeilijkheid ontmoet, waarover op school niet gesproken is, tot wien moet hij zich dan wenden, anders dan tot zijn eigen leermeester? En hoe kan deze die moeilijkheid uit den weg ruimen, als hij zich niet geoefend heeft aan beschouwingen van grootere algemeenheid dan die bij het onderwijs voorkomen?" M.a.w.: de docent moet veel meer weten dan hij zijn leerlingen vertelt; een door en door gezond paedagogisch beginsel. „Ten einde de leeraren de kennis te verschaffen van enkele algemeene eigenschappen der ruimte, willen wij enkele lessen wijden aan het onderzoek van de kromming van ruimtekrommen, en van gebogen oppervlakken".

En nu volgt een synthetische, uiterst lezenswaardige, bespreking van den inhoud van de groote verhandelingen van 1771 en 1775 (vgl. §§ 5 en 6) over evoluten van vlakke en ruimtekrommen, de „surface des pôles", evolventen, kromtestralen, ontwikkelbare oppervlakken, omhullende cylinders van oppervlakken, met hunne contactkrommen, in het bijzonder bij kwadrieken, als wanneer die contactkrommen vlak zijn; door middel van die cylinders de beide krommingen van een oppervlak in een punt, (slechts matig geslaagd), de beide stellen kromtelijnen, de toepassing hiervan op den bouw der gewelven, iets wat Monge altijd zeer ter harte ging, en waar hij op allerlei plaatsen, en bij allerlei gelegenheden, met zichtbaar genoegen over uitwijdt; en ten slotte, en dat zou men allicht allerminst in een boek over Beschrijvende Meetkunde verwachten, over de beste manier om de afbeelding van een oppervlak te harceeren, ten einde de goede ronding te verkrijgen. Dit moet geschieden door middel van één, beter nog van beide stellen kromtelijnen. Nu bezitten de meeste oppervlakken, die buiten de Wiskunde om voorkomen, geen strenge definitie, zoodat hun kromtelijnen niet te bepalen zijn; maar als de artiesten zich in hun jeugd geoefend hadden in het bepalen der kromtelijnen op oppervlakken, die wèl een scherpe definitie hebben, dan zouden zij gevoeliger zijn voor den juisten vorm, en de juiste ligging, op andere. „Nous n'insisterons pas sur cet objet qui ne présente peut-être que le moindre des avantages que les arts et l'industrie

retireraient de l'ètablissement d'une école de Géométrie descriptive dans chacune des principales villes de France."

En hiermede neemt de schrijver van zijn lezers afscheid.

16. Keeren wij nu terug tot de eerste vier Afdeelingen. Nadat de schrijver in een korte eerste paragraaf het tweeledige doel der Beschrijvende Meetkunde nog eens heeft meegedeeld, het afbeelden, en het construeeren met die afbeeldingen zóódanig, dat daardoor de overeenkomstige constructies in de ruimte ondubbelzinnig zijn vast gelegd, „et d'en déduire (nl. uit die afbeeldingen) toutes les vérités qui résultent et de leur forme, et de leurs positions respectives", gaat hij in de volgende §§ over tot de vraag, wat de beste manier is om een punt in de ruimte te bepalen.

„De ruimte is onbegrensd; al haar deelen zijn volmaakt hetzelfde, zij hebben niets dat hen onderscheidt, en geen enkel kan dienen als vast ankerpunt om de plaats van een punt te bepalen". M.a.w.: iedere plaatsbepaling moet relatief zijn; men kan een plaats slechts bepalen ten opzichte van andere plaatsen.

Zoo kan men de plaats van een punt bijv. bepalen door zijn afstanden tot 3 andere punten A, B, C, nl. als snijpunt van 3 bollen. Deze bepalingswijze is wel is waar dubbelzinnig, maar daaraan is tegemoet te komen door afspraken omtrent de eene of de andere zijde van het vlak van △ ABC.

Intusschen is deze bepalingswijze natuurlijk heel goed voor één punt, maar niet voor meer; drie punten op een rechte lijn te brengen zou al een heel werk zijn!

Volgen 3 rechte lijnen. Dit is nog veel erger, want voor ieder punt moeten 3 onwentelingscylinders met elkaar gesneden worden, en als men dat gedaan heeft, loopt men gevaar 8 punten te vinden, die nauwelijks van elkaar te scheiden zijn.

Dus dan maar 3 vlakken, hoewel het vlak 2 afmetingen heeft, en het punt in het geheel geen, zoodat het vlak in het nadeel is. Monge zegt dit wel is waar niet met zooveel woorden, maar hij bedoelt het ongetwijfeld. Tegenwoordig zou hij het niet alleen niet zeggen, maar zelfs niet bedoelen. Evenals wij zou hij weten, dat vlak en punt volkomen gelijkwaardige elementen zijn; het vlak heeft 2 afmetingen als drager zijner punten, en het punt heeft eveneens twee afmetingen, nl. als drager van de vlakken die er door heen gaan.

Dus 3 vlakken, en deze bij voorkeur loodrecht op elkaar, ten

eerste omdat dit bij de volmaakte willekeurigheid van den hoek de eenig rationeele keuze is, nl. het gemiddelde van àlle keuzen, ten tweede, omdat bij een zeer stompen hoek de beide loodlijnen, in de beide projecties van een punt opgericht, elkaar onder een zeer scherpen hoek zouden snijden, en dus onnauwkeurigheden zouden veroorzaken. „C'est ce procédé que l'on emploie ordinairement dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie".

„Mais dans la Géométrie descriptive, qui à été pratiquée depuis beaucoup plus longtemps, par un beaucoup plus grand nombre d'hommes, et par des hommes dont le temps était précieux, les procédés se sont encore simplifiés; et au-lieu de la considération de trois plans, on est parvenu, au moyen des projections, à n'avoir plus besoin explicitement que de celle de deux."

Dit mogen zich gezegd houden de fanatici van het 3e projectievlak, met hun stortbuien van stippellijnen, en draaimolens van concentrische cirkels.

17. Monge spreekt nooit van de as van projectie, of de grondlijn, of zoo iets; hij spreekt altijd van de snijlijn der twee projectievlakken, en noemt deze het heele boek door LM; en zijn notatie is de volgende. Een punt heet bijv. A, zijn horizontale projectie a, zijn vertikale a'; maar als het vertikale vlak wordt neergeslagen, dan wordt dit a''; een punt A wordt dus in de teekening bepaald door zijn beide projecties a, a''.

Het eerste vraagstuk betreft nu de ware lengte van een lijnstuk AB. Dit wordt *niet* opgelost door het horizontaal-projecteerende vlak neer te slaan maar, wat veel korter is, door de lijn bijv. om de vertikaal Bb te laten draaien (en dit zelfs alleen maar in gedachten!) tot evenwijdig met het vertikale vlak. Dat de andere methode gemakkelijker zou zijn, wil er bij mij niet in; wie zich niet kan voorstellen hoe een deur open en dicht gaat, moet maar liever van de Beschrijvende Meetkunde afblijven!

In plaats van nu met de eenvoudige vraagstukjes dadelijk verder te gaan, slaat hij een zijweg in, en trekt hij een interessante parallel tusschen de methoden der Beschrijvende Meetkunde en der Algebra.

Hoe moet men een veelvlakkig lichaam afbeelden? Voor dit vraagstuk zijn evenmin algemeene voorschriften te geven als voor de vraag, hoe men een probleem in vergelijking moet brengen; dat hangt van het probleem af. Maar evenals er vaste methoden bestaan

om die vergelijkingen op te lossen, kan men ook vaste methoden aangeven om over die lichamen vraagstukken op te lossen, als de afbeeldingen er eenmaal zijn. „Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive, qui ne puisse être traduite en Analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie."

Daarom moesten de beide richtingen eigenlijk altijd tegelijk beoefend worden; „la Géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées, l'évidence qui est son caractère et, à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre". Dat Monge zelf zich hier strikt aan gehouden heeft, weten wij; en verder is het een verheugend feit dat zijn wensch over de heele wereld in vervulling gegaan is.

18. Hoe moet een gebogen oppervlak worden afgebeeld? Want men kan toch niet van alle punten daarvan de beide projecties aangeven; dan zou men immers niets anders dan twee zwarte vlekken te zien krijgen.

Ieder gebogen oppervlak met een behoorlijke definitie heeft, en zelfs op oneindig veel manieren, een bepaalde voortbrengingswijze door middel van rechte en(of) kromme lijnen; door middel van een „richtkromme", „conductrice", of „directrice", en een „beschrijvende kromme" of „génératrice". Deze „génératrice" is niet altijd onveranderlijk van vorm; anderzijds is zij dikwijls een rechte lijn, en dat is natuurlijk al bijzonder plezierig.

Nu kan één en dezelfde voortbrengingswijze altijd op oneindig veel manieren ten uitvoer gebracht worden; somtijds is één manier voldoende, somtijds is het noodig of wenschelijk het twee maal te doen, en dan een punt op het oppervlak te bepalen als snijpunt van twee „génératrices". In zijn „Feuilles d'Analyse" heeft Monge zich aan deze voorschriften streng gehouden.

Wat zijn nu de „conductrice" en de „génératrice" van een vlak? De eerste is een willekeurige rechte, en de tweede eveneens een rechte, die over de eerste glijdt, hetzij dat zij daarbij steeds evenwijdig blijft aan zich zelf, hetzij dat zij steeds door eenzelfde punt gaat; de beide ontaardingsgevallen van den cylinder en den kegel. Maar het eenvoudigst is het, het vlak te bepalen door twee „directrices", en deze in de beide projectievlakken te leggen; „pour abréger le langage, nous leur donnerous le nom de *traces*", van

sporen, die het vlak achterlaat bij het doorboren der projectievlakken; de Duitschers spreken inderdaad van „Spuren", wij van „doorgangen", wat even goed is.

En nu volgen de oplossingen van de bekende grondvraagstukken, zonder dat juist alle behandeld zijn, en zonder dat er ook angstvallig voor gezorgd is, dat altijd het moeilijkere volgt op het meer eenvoudige. De meeste van deze constructies zijn onveranderd in alle latere leerboeken over gegaan, omdat er niets aan te verbeteren viel; ook zijn zoo nu en dan enkele wel eens door slechtere vervangen (vgl. § 17).

Het zijn er in het geheel 9.

1. Door een punt een lijn te trekken, evenwijdig aan een gegeven lijn.
2. Door een punt een vlak te brengen, evenwijdig aan een gegeven vlak. Hier wordt voor de eerste maal het gebruik der „hoofdlijnen", dus van lijnen evenwijdig aan de doorgangen, gedemonstreerd.
3. Uit een punt de loodlijn neer te laten op een vlak en het voetpunt te bepalen.

Merken we in het voorbijgaan even op, dat Monge intusschen de notatie nog een weinig vereenvoudigd heeft; de horizontale projectie van een punt draagt een hoofdletter, de vertikale de overeenkomstige kleine: A, *a*.

4. Door een punt het vlak te brengen loodrecht op een gegeven lijn. Voor het snijpunt wordt verwezen naar 3, en opgemerkt wordt dat hiermede meteen het vraagstuk opgelost is: uit een punt de loodlijn neer te laten op een lijn.
5. De snijlijn van twee vlakken te bepalen.
6. Den standhoek van twee vlakken te bepalen.
7. Den hoek van twee snijdende lijnen te bepalen. Hier wordt uitdrukkelijk opgemerkt, dat het snijpunt der vertikale projecties met dat der horizontale op een loodlijn t.o.v. LM moet liggen.
8. Den hoek van een lijn en een vlak te bepalen. Men laat uit een willekeurig punt van de lijn de loodlijn neer op het vlak, en bepaalt den hoek van deze met de gegeven lijn; die hoek is het complement van den gezochten.
9. „Réduire un angle à l'horizon."

Ziehier ongetwijfeld een van de vraagstukken, waarmee M o n g e zich te M é z i è r e s had bezig te houden, en waaruit de Beschrijvende Meetkunde ontstaan is. Hij geeft er zelf de volgende beschrijving van.

Bij het opnemen van een terrein, om het in kaart te brengen, verbindt men de meest in het oog springende punten door rechte lijnen, waardoor een net van driehoeken ontstaat; men meet van deze de zijden en de hoeken. Maar die driehoeken liggen, tenzij het terrein volkomen vlak is, wat in Frankrijk *niet* het geval is, scheef, zoodat de hoeken niet in ware grootte op de kaart kunnen worden overgenomen; men moet hunne projectie hebben. Indien nu gegeven zijn: 1o. de hoek zelf, 2o. de hoeken die de beenen insluiten met het horizontale vlak, hoe groot is dan de projectie van den hoek. Het is een eenvoudig vraagstuk van den drievlakshoek, met één ribbe loodrecht op het horizontale projectievlak, en welks drie zijhoeken gegeven zijn, maar het demonstreert op bijzonder heldere wijze het nut der constructie; want de heele oplossing vergt slechts het uitzetten van 3 hoeken, en het beschrijven van 3 cirkelbogen; de teekenaar kan dus inderdaad klaar zijn in den tijd, dien de rekenaar noodig heeft om te „grouper ses chiffres".

M o n g e voelt zelf wel, dat het voorgaande wel het allerminste is, wat men den leergierigen lezer kan voorzetten; daarom besluit hij deze eerste Afdeeling met de volgende woorden. „Les neuf questions qui précèdent suffisent à peine pour donner une idée de la méthode des projections; elles ne peuvent en montrer toutes les ressources. Mais à mesure que nous nous élèverons à des considérations plus générales, nous aurons soin de faire les opérations qui seront les plus propres à remplir cet objet."

19. In de tweede Afdeeling komen de raakvlakken en de normalen van gebogen oppervlakken ter sprake. Om het belang hiervan goed te doen gevoelen, haalt M o n g e twee voorbeelden uit de praktijk aan. Het eerste is weer ontleend aan den bouw der gewelven, het tweede betreft het aanbrengen van tinten op een teekening, om aan de afbeelding van een gebogen oppervlak de behoorlijke ronding te geven.

Allereerst worden nu behandeld de gevallen, waarbij het raakpunt gegeven is: het aanbrengen van het raakvlak in een punt van een cylinder, een kegel, en een omwentelingsoppervlak met vertikale as, indien van dat punt de horizontale projectie gegeven is; in het

laatste geval wordt het vlak door de omwentelingsas en het raakpunt om die as gedraaid tot in den stand evenwijdig aan het vertikale vlak, wordt in dien stand het raakvlak geconstrueerd, en daarna het geheel terug gedraaid.

In het vierde voorbeeld wordt voor de eerste maal de kortste afstand, of gemeenschappelijke loodlijn, van 2 kruisende lijnen geconstrueerd, en wel merkwaardiger wijze op een manier, die van de thans gebruikelijke afwijkt, en moeilijker is. Allereerst wordt door de lijn AB een vlak V aangebrácht // CD, zooals ook wij gewend zijn, maar dan wordt de projectie van CD op dit vlak gevonden met behulp van een cylinder met CD als as, en die V aanraakt. De manier waarop die cylinder wordt aangebracht, is een wonder van beknoptheid, maar voor den beginneling nog al lastig. Na afloop zegt M o n g e dan ook doodrustig, dat het aanbrengen van den cylinder overbodig was, want dat men eenvoudig de vlakken door AB en CD $\perp$ V met elkaar had kunnen snijden!

Hierna komen de gevallen aan de beurt, waarbij het raakpunt niet van te voren gegeven is, maar integendeel gezocht moet worden; en hier ontmoeten wij allereerst de beide beroemde constructies betreffende de beide raakvlakken door een lijn aan een bol.

De eerste is de gewone: men brengt door het middelpunt van den bol het vlak aan loodrecht op de lijn, en trekt van uit het snijpunt de raaklijnen aan den in het vlak gelegen grooten cirkel; maar de manier waaròp dit alles geschiedt, waarop het vlak door het middelpunt bepaald wordt door zijn hoofdlijnen in plaats van door zijn, dikwijls onhandelbare, doorgangen, waarop het gesneden wordt met de lijn, en daarna wordt neergeslagen niet tot in, maar tot evenwijdig aan het horizontale vlak, dit alles is een staaltje van hooge constructiekunst, en het herhaalde bestudeeren overwaard.

20. De tweede oplossing heeft een veel verder strekkende beteekenis; want in de eerste plaats is zij niet slechts van toepassing op den bol, maar op àlle gebogen oppervlakken, en in de tweede plaats leidt zij tot fundamenteele theoretische resultaten.

Denk door een lijn l een raakvlak aan een gebogen oppervlak; het raakpunt zij R. Neemt men op l een willekeurig punt T aan, dan is TR een raaklijn in R. Trekt men dus uit T àlle raaklijnen, waardoor een omgeschreven kegel ontstaat, dan is de lijn TR er onder. De contactkromme van dien kegel gaat dus door R. Neemt

men 2 punten op l aan, T_1 en T_2, dan ontstaan 2 omgeschreven kegels, met 2 contactkrommen, die beide door R gaan; zooveel snijpunten dus die beide contactkrommen gemeen hebben, zooveel raakvlakken gaan door R.

Om deze oplossingsmethode nu handig op den bol toe te passen, neemt M o n g e het punt T_1 op dezelfde hoogte aan als het middelpunt van den bol; de eerste kegel is dan heel gemakkelijk aan te brengen, en het vlak van den raakcirkel staat vertikaal.

Het punt T_2 wordt evenver vóór (of achter) het vertikale vlak aangenomen als het middelpunt van den bol; de as van den tweeden kegel is dan evenwijdig aan het vertikale vlak, en het vlak van den raakcirkel staat er loodrecht op. De horizontale doorgang van het vlak van den eersten cirkel en de vertikale van het vlak van den tweeden, zijn dus meteen de beide projecties van de lijn, die slechts met den bol gesneden behoeft te worden, om de beide raakpunten R_1, R_2 op te leveren. Hiertoe wordt het vertikaal staande vlak door die lijn neergeslagen om de horizontale middellijn van den cirkel tot evenwijdig aan het horizontale vlak, als wanneer zoowel de lijn als de cirkel gemakkelijk in neergeslagen toestand te teekenen zijn. Het weder oprichten van de gevonden punten is dan geen kunst meer.

Doch nu verder. Neemt men op l zooveel punten T aan als men wil, dan gaan de vlakken van de raakcirkels van de omgeschreven kegels alle door dezelfde lijn R_1R_2, die l loodrecht kruist, en omgekeerd: de grondstelling van de theorie der polen en poolvlakken ten opzichte van den bol. En snijdt men de geheele figuur met het vlak door l en het middelpunt van den bol, dan ontstaat de grondstelling van de theorie der polen en poollijnen ten opzichte van den cirkel. „Ce n'est pas parce que tous les points de circonférence sont également éloignés du centre, que le cercle jouit de la propriété que nous venons d'énoncer, c'est parce qu'il est une courbe du second degré; et toutes les sections coniques sont dans le même cas."

Inderdaad, men denke in een vlak door l een willekeurige kegelsnede, zeggen we gemakshalve een ellips. Laten wij deze om één van haar assen, zeg de groote, draaien, dan ontstaat een omwentelingsellipsoïde, en op deze laat zich volmaakt dezelfde redeneering toepassen als op den bol. Snijdt men de figuur dan weer met het oorspronkelijke vlak, dan ontstaat de grondstelling van de

theorie der polen en poollijnen ten opzichte van de kegelsnede. Monge gebruikt het woord „pool" nog niet; dit is geschied door één van zijn volgelingen, Servois, en Gergonne heeft er de benaming „droite polaire" bijgevoegd.

21. „Door een punt C een vlak te brengen, dat twee bollen tegelijk aanraakt."

Denken wij gemakshalve de beide bollen geheel buiten elkaar, dan zijn er twee kegels, die beide bollen aanraken; de toppen noemen wij tegenwoordig de gelijkvormigheidspunten der beide bollen, maar dezen naam gebruikt Monge nog niet.

Verbindt men nu C met deze beide toppen, dan heeft men door de verbindingslijnen slechts de raakvlakken te brengen aan de bijbehoorende kegels, of, zoo men liever wil, aan één van de beide bollen.

Laat 3 bollen gegeven zijn, met hun middelpunten bijv. in het horizontale vlak. Men kan nu boven op deze bollen een vlak leggen, dat alle drie aanraakt, en dat tevens de drie kegels aanraakt die de bollen twee aan twee aanraken; de toppen van deze kegels moeten nu natuurlijk op den doorgang van het raakvlak liggen, d.w.z.: *de drie uitwendige gelijkvormigheidspunten van drie cirkels liggen op een rechte lijn.*

Men kan echter ook driemaal een vlak aanbrengen dat één bol van boven, de beide andere aan den onderkant aanraakt; brengt men nú de rakende cirkels aan, dan ziet men onmiddellijk dat *telkens één uitwendig en twee inwendige gelijkvormigheidspunten op een rechte lijn liggen.*

Ieder kent deze „stellingen van Monge"; hier kan men zien hoe zij ontdekt zijn.

Met het oog op het volgende willen wij de woordenkeus eenigszins wijzigen; een benaming gebruikende, die later door Carnot in zijn „Géométrie de position" is ingevoerd, nl. „volledige vierzijde", „quadrilatère complet", willen wij zeggen dat de 6 gelijkvormigheidspunten van 3 cirkels de 6 hoekpunten zijn van een volledige vierzijde; de 4 gelijkvormigheidsassen zijn de 4 zijden.

Denken wij nl. eens 4 bollen, wier middelpunten 1, 2, 3, 4 een viervlak vormen, en die (de figuur is lastig genoeg!) geheel buiten elkaar liggen; Monge zegt dan allereerst, echter zonder het bewijs te geven, dat de 6 uitwendige gelijkvormigheidspunten de hoekpunten zijn van een volledige vierzijde, en dus in een vlak V

liggen, en 3 aan 3 op een rechte lijn (nl. de snijlijnen met V van de zijvlakken van het viervlak).

Dit is duidelijk. Noemen wij nl. het uitwendig gelijkv.punt van de bollen 1 en 2 (12), dan liggen (12), (13), (23) op een rechte lijn, maar evenzoo (12), (14), (24); telkens 2 gelijkv. assen moeten elkaar dus snijden, en derhalve alle 4 in één vlak V liggen.

Verder zegt hij, dat 4 maal telkens 3 uitw., en 3 inw. gelijkv. punten in een vlak liggen, en ook dit is evident, want dat zijn eenvoudig de figuren in de 4 zijvlakken.

Maar hiermede is de zaak niet afgeloopen. Het interessantste heeft Monge niet verteld, waarschijnlijk omdat hij de heele zaak van de 4 bollen slechts in het voorbijgaan behandeld heeft.

De lezer make even een stereometrische schets; het hoekpunt 1 liefst bovenaan, en het vlak V beneden. Verder noeme hij het inw. gelijkv. punt van de bollen 1 en 2 (12)′, enz.

Dan is onmiddellijk duidelijk, dat het 3 maal voorkomt, dat 4 inw. en 2 uitw. gelijkv. punten in een vlak liggen. (12), (13)′, (23)′ is een rechte lijn, evenzoo (12), (14)′, (24)′; maar evenzoo (13)′, (14)′, (34), en (23)′, (24)′, (34). Ook hier dus weer een volledige vierzijde, in een vlak, gaande door 2 overstaande hoekpunten, en dus een diagonaal, van de vierzijde in V.

Beschouwt men 2 van die vlakken, bijv. het zooeven beschouwde, en dat door de diagonaal (13), (24), dan ziet men dat beide de punten (14)′ en (23)′ bevatten, zoodat hunne snijlijn de beide inw. gel. p. op de overstaande ribben 14 en 23 verbindt, en door een diagonaalpunt gaat van de volledige vierzijde in V.

De 3 verbindingslijnen van de 3 paar inw. gel. p. gaan dus door één punt, (nl. omdat ze elkaar twee aan twee moeten snijden, en zeker niet in één vlak liggen), *en zij gaan één voor één door een diagonaalpunt van de volledige vierzijde in V.*

Al deze eigenschappen gaan door, al ligt de top 1 van het viervlak ook nòg zoo dicht bij het grondvlak 234; zij gaan dus óók nog door bij de limiet, d.w.z. als de 4 middelpunten in één vlak komen te liggen. Men kan nu de bollen door cirkels vervangen, en heeft dan de stellingen betreffende de gelijkv. p. van 4 cirkels. Men merke in het bijz. op dat de verbindingslijnen van de inw. gelijkv. p. op 12, 34 enz. door één punt gaan, en tevens door de diagonaalpunten van de volledige vierzijde der uitw. gelijkv. punten.

Maakt men alle 4 cirkels even groot, dan vallen alle 6 uitw. gel. p. in het oneindige, terwijl de inwendige de middens van de zijden en diagonalen van vierhoek 1234 worden. Deze 6 middens liggen op een kegelsnede (de middelpuntskegelsnede van den bundel, met de basispunten 1, 2, 3, 4), waarvan het middelpunt bekend is. En plaatst men nu bovendien het punt 4 nog in het hoogtepunt van △ 123, dan wordt de kegelsnede de negenpuntscirkel.

Men geve eens aan waar de bewuste kegelsnede blijft, indien 1234 een trapezium of parallelogram wordt, dat is leerrijk.

Ten slotte komen nog de vraagstukken van de raakvlakken door een punt aan cylinder of kegel, en door een lijn aan een omwentelingsoppervlak met vertikale as; vraagstukken, waarvan de oplossingen reeds sedert lang klassiek zijn.

22. De derde Afdeeling is de omvangrijkste; zij draagt tot titel: „Over de onderlinge doorsnijding van gebogen oppervlakken", maar er worden óók in behandeld de doorsnijdingen met platte vlakken.

Alvorens te beginnen, legt Monge er nog eens den nadruk op dat iedere gebeurtenis in de Geometrie kan worden weergegeven door de teekens der Algebra, en dat bijv. het construeeren van de doorsnede van twee gebogen oppervlakken de allergrootste analogie vertoont met het elimineeren van één van de drie veranderlijken uit twee vergelijkingen in x, y, z; maar dat ook omgekeerd „il n'y a aucune opération d'Analyse en trois dimensions, qui ne soit l'écriture d'un mouvement opéré dans l'espace et dicté par elle". Wij kunnen ons gelukkig achten, dat zulke opmerkingen reeds lang niet meer noodig zijn.

Twee oppervlakken worden met elkaar gesneden door het aanbrengen van een stel hulpoppervlakken, in den regel platte vlakken, een enkele maal bollen, nl. indien twee omwentelingsoppervlakken met elkaar gesneden moeten worden, wier assen elkaar snijden. Bij twee omwentelingskegels met vertikale assen kan men met voordeel horizontale hulpvlakken gebruiken, maar in andere gevallen, en zoo men wil ook in dit, moet men de hulpvlakken door de verbindingslijn der beide toppen laten gaan, en dus bij cylinders evenwijdig aan de beschrijvenden van beide oppervlakken tegelijk aannemen. Hierbij is „de projectie van de raaklijn aan een kromme de raaklijn aan de projectie van de kromme, en het raakpunt op

de projectie is de projectie van het raakpunt op de kromme zelve".

Volgt de doorsnijding van een omwentelingscylinder met vertikale as met een plat vlak, met het bepalen van de ware gedaante der doorsnede, en het uitslaan van den cylinder met de doorsnede. Hierbij, en ook in alle andere gevallen, maakt Monge onbekommerd gebruik van het beginsel, dat men in de Analytische Meetkunde toepast indien men, bijv. bij een ellips, onderstelt dat de coördinatenassen tevens de assen der ellips zijn: hij plaatst het vertikale projectievlak loodrecht op het snijvlak, wat de constructie in hooge mate vereenvoudigt. Maar in de volgende figuur neemt hij dan toch zoowel den cylinder als het snijvlak willekeurig.

Voor het bepalen van de ware gedaante der doorsnede wordt het snijvlak (althans in de tweede figuur) om zijn horizontalen doorgang neergeslagen in het horizontale projectievlak, en geleerd hoe één punt I, *i* der doorsnede rechtstreeks wordt neergeslagen, waardoor een punt S ontstaat; en er wordt attent op gemaakt dat de raaklijnen in I en S elkaar snijden op den horizontalen doorgang. Maar dan wordt opgemerkt dat alle andere punten S der neergeslagen doorsnede op dezelfde wijze geconstrueerd worden, en dit is een opmerking, een Monge onwaardig. Hij had behooren te zeggen dat, evenals de rááklijnen in I en S, zoo ook twee bij elkaar behoorende kóórden door I en S elkaar op dien doorgang ontmoeten, en dat zóó de overige punten neergeslagen moeten worden. De directe methode punt voor punt is onverdraaglijk omslachtig, en geeft aanleiding tot groote onnauwkeurigheden.

Volgt de doorsnede van een willekeurigen kegel met een plat vlak, waarbij het snijvlak weer loodrecht gezet wordt op het vertikale vlak.

23. Nu komt de doorsnede van twee willekeurige (kwadratische) kegels aan de beurt, door middel van hulpvlakken door de verbindingslijn der beide toppen. Voor één zoo'n vlak wordt de constructie uitgevoerd, waardoor 4 punten op 4 verschillende takken der doorsnijding ontstaan, en in deze punten worden ook de raaklijnen geconstrueerd, maar daar is de zaak mee afgeloopen, en dit drijft ons tot de opmerking, dat dit vraagstuk uiterst fragmentarisch behandeld is. Niets aangaande de wijze, waarop die 4 takken in elkaar over, en de bijbehoorende raaklijnen door een kegeltop gaan (grensvlakken); niets aangaande eventueele oneindig verre punten en asymptoten, of aangaande de punten op de

schijnbare omtrekken; het maakt den indruk alsof de schrijver zich hier, evenals in het vraagstuk uit de vorige §, een beetje haastig van de zaak heeft afgemaakt.

Moet een willekeurige kegel open gesneden, en uitgeslagen worden in een plat vlak, dan wordt allereerst de doorsnede geconstrueerd met een bol, om den top van den kegel als middelpunt, en wel door middel van een stel hulpvlakken, door de vertikaal door den top, en wenteling van deze, een voor een, tot evenwijdig aan het vertikale vlak; hierbij is vooral de constructie van de raaklijn fraai.

Nu wordt allereerst de doorsnede afgewikkeld met haar horizontaal-projecteerenden cylinder, waardoor de ware lengte dier doorsnede ontstaat, en daarna wordt deze kromme in kleine stukjes overgebracht op den cirkelboog, waarin zij overgaat indien zij met den kegel afgewikkeld wordt. Ten slotte wordt dan nog de basiskromme van den kegel afgewikkeld.

De doorsnijding van twee (kwadratische) cylinders wordt op dezelfde fragmentarische wijze besproken als die van twee kegels, hoewel hier de figuur volledig geteekend is.

Moeten twee omwentelingsoppervlakken met elkaar snijdende assen met elkaar gesneden worden, dan brenge men een stel bollen aan om het snijpunt der assen als middelpunt; iedere hulpbol snijdt dan uit elk der oppervlakken een cirkel. Brengt men het horizontale projectievlak aan loodrecht op één van de twee assen, en het vertikale evenwijdig aan het vlak van de twéé assen, dan verloopt de constructie hoogst eenvoudig.

Naar aanleiding van dit vraagstuk maakt M o n g e de opmerking dat het, principieel althans, wel zeer eenvoudig is de raaklijn aan een ruimtekromme te construeeren indien deze de doorsnede is van twee oppervlakken (nl. als snijlijn van de beide raakvlakken), maar dat men er anders voor staat indien de kromme optreedt als de baan van een punt. In dit geval is het vraagstuk van de raaklijn in zijn algemeenen vorm een vraagstuk uit de Differentiaalrekening. Zijn nl. x, y, z functies van één parameter, dan hangen de projecties van de raaklijn ten nauwste samen met de afgeleiden van x, y, z naar dien parameter. Meetkundig gesproken, laat zich hier geen algemeen voorschrift geven; maar in sommige gevallen kan men zich helpen met de methode van R o b e r v a l,

„qu'il inventa avant que Descartes eût appliqué l'Algèbre à la Géométrie".

Als voorbeeld kiest hij natuurlijk de ellips, met de brandpunten A en B. Doorloopt een punt P deze kromme, dan is zijn beweging ieder oogenblik op te vatten als de resultante van twéé rechtlijnige bewegingen, bijv. van A weg, en naar B toe, of omgekeerd, met

$$AP + PB = \text{constant.}$$

In denzelfden tijd wordt dus de weg AP evenveel langer als PB korter wordt, zoodat de snelheden in de richtingen AP en PB gelijk zijn; waaruit onmiddellijk volgt, dat de raaklijn den buitenhoek van AP en PB middendoor deelt.

Monge wil nu deze constructie uitbreiden op het geval van de doorsnede van twee omwentelings-ellipsoïden met een gemeenschappelijk brandpunt, dus bijv. A, B en A, C, door de resultante te construeeren van 3 gelijke vectoren, uitgezet op bijv. AP, PB, en PC. Dit is natuurlijk wel juist, alleen is de kromme opnieuw een ellips, en dus wéér vlak!

Monge heeft dit niet geweten, en zijn vergissing is dan ook zeer begrijpelijk. Dat twee omwentelings-ellipsoïden met een gemeenschappelijk brandpunt elkaar slechts in ellipsen kunnen snijden, is zeker eer hoogst onverwacht dan van zelf sprekend te noemen, en toch wordt het van zelf sprekend, indien men eenmaal zóó ver is dat men inziet dat deze figuur in wezen niet verschilt van de figuur van twee kwadrieken met een gemeenschappelijk omgeschreven raakkegel. Deze hebben dan in 2 punten het raakvlak gemeen, en deze punten worden dubbelpunten der doorsnijding. Maar een vierdegraads-ruimtekromme met 2 dubbelpunten moet uiteenvallen in 2 kegelsneden.

Ziehier een van de grootste triomfen van het onversaagd invoeren van het imaginaire in de Meetkunde. In Monge zijn tijd wàs men natuurlijk nog lang zoo ver niet, en ook Dupin, de leerling van Monge, die het theorema ontdekt heeft, heeft het moeten opdelven in het zweet zijns aanschijns, nl. bij gelegenheid van zijn beroemde onderzoekingen over de bollen, die 3 bollen raken, de focaalkegelsneden en de cycliden („Développemens de Géométrie," p. 280).

24. De vierde, en laatste, Afdeeling, bevat allerlei toepassingen van de derde, in de eerste plaats de constructie van den bol door 4 punten, waarbij weer in ruime mate gebruik gemaakt wordt van

de mogelijkheid de projectievlakken gunstig te kiezen. De punten A, B, C worden in het horizontale projectievlak gelegd, en het vertikale wordt evenwijdig genomen aan AD; op deze wijze vordert de constructie slechts enkele weinige lijnen.

Dan het vraagstuk van den ingeschreven bol van een viervlak, met de beroemde constructie met behulp van een vlak evenwijdig aan het grondvlak, zooals men die beschreven en uitgevoerd vindt in ieder leerboek der Beschrijvende Meetkunde, dat niet bij de allereerste beginselen blijft staan.

Opvallend is het, dat M o n g e de opmerking weglaat, dat men, door ook de deelvlakken van de buitenhoeken van het grondvlak te beschouwen, even gemakkelijk de 4 + 3 aangeschreven bollen vindt.

Deze oerconstructie is later door den franschen wiskundige H e r m a r y op bijzonder fraaie wijze door een andere vervangen, waarbij het middendoor deelen van standhoeken tot op een derde terug gebracht wordt, en slechts gebruik wordt gemaakt van de eenvoudige waarheid, dat de raaklijnen uit een punt aan een bol even lang zijn.

Slaat men de 3 opstaande zijvlakken in het grondvlak ABC neer, „de manière à écraser la sphère qu'on a en vue", zooals de schrijver het schilderachtig uitdrukt, dan is al heel gemakkelijk in te zien, dat de raakpunten op de drie opstaande zijvlakken, alle drie juist op het raakvlak met het grondvlak vallen. Maar de lijnen van den top D naar de raakpunten met de opstaande zijvlakken zijn alle drie even lang, als raaklijnen uit D aan den bol; bij het neerslaan vindt men dus 3 neergeslagen punten D zóódanig, dat de cirkel door deze punten zijn middelpunt in het raakpunt van het grondvlak heeft. En door anders neer te slaan, vindt men ook hier gemakkelijk de aangeschreven bollen.

Reeds in het begin van zijn boek (vgl. deze Studie, § 16), heeft M o n g e de opmerking gemaakt, dat men de plaats van een punt in de ruimte zou kunnen bepalen door zijn afstanden van 3 andere punten A, B, C te geven; hier verlangt hij nu de constructie uit te voeren.

Hij maakt weer gebruik van de vrije keuze der projectievlakken. De punten A, B, C worden in het horizontale vlak aangenomen, en het vertikale wordt $\perp$ AB gezet.

De bollen om A, B, C als middelpunten hebben nu twee aan

twee een cirkel gemeen, en de vlakken van deze gaan alle drie door dezelfde vertikale lijn. Deze moet met één van die drie cirkels gesneden worden; aangezien de lijn AB loodrecht staat op de as van projectie, is de doorsnede van de bollen om A en B hier van zelf voor aangewezen.

De drie bollen snijden het horizontale vlak in 3 cirkels, om A, B, C als middelpunten. Nu gaan de vlakken van de drie doorsnijdingscirkels door één lijn, *dus gaan de gemeenschappelijke koorden der drie cirkels om A, B, C door één punt,* een bewijs, dat ons doet denken aan dat van de gelijkvormigheidspunten van § 16.

25. Tot slot volgen nu nog enkele vraagstukken van militair-topografischen aard, voor ons belangrijk, omdat het juist deze zijn, waarmee de jeugdige Monge zich te Mézières had bezig te houden, en waaruit de Beschrijvende Meetkunde ontstaan is.

Ten eerste. Een ingenieur doorkruist een bergachtig land, gewapend met een topografische kaart, waarop ook de hoogten zijn aangegeven, een instrument om hoeken te meten, en een schietlood. Hij komt op een punt, dat hij belangrijk acht, maar dat niet op de kaart aangegeven is; hoe zal hij dat punt, mèt zijn hoogte, in kaart brengen?

Hij kiest 3 gunstig gelegen punten A, B, C, die op de kaart voorkomen, en wier hoogte hij dus ook kent, en meet nu, van zijn standplaats P uit, de hoeken α, β, γ die de stralen PA, PB, PC insluiten met het schietlood; dan weet hij, dat zijn standplaats ligt op 3 omwentelingskegels, met toppen A, B, C, met vertikale assen, en met halve tophoeken α, β, γ. Deze kegels kunnen 8 punten gemeen hebben, maar de ingenieur kan immers reeds van te voren zien welk van deze (ze zijn bovendien in den regel niet alle reëel!) hij moet hebben, en dit punt construeert hij door middel van een stel horizontale hulpvlakken. Deze snijden uit elk van de kegels een cirkel, en nu moet het vlak zóódanig verplaatst worden, dat deze 3 cirkels zoo goed mogelijk door één punt gaan. Men krijgt in beide projecties 3 takken van krommen, en deze moet men zoo nauwkeurig mogelijk teekenen, en met elkaar snijden. De hoogte volgt dan uit de vertikale projectie.

Ten tweede. Aan het meetinstrument van den ingenieur zit geen schietlood; hoe zal hij nu zijn plaats bepalen?

Hij zal, van zijn standplaats P uit, de hoeken meten waaronder hij BC, CA, AB ziet, en kan dan gaan construeeren; maar de constructie wordt lastiger.

Hij zal het vlak ABC tot horizontaal projectievlak kiezen, en het vertikale loodrecht op AB zetten. Nu kan hij den cirkelboog construeeren, die de meetkundige plaats is van alle punten, van waaruit men AB onder den gemeten hoek APB ziet, en als men dezen om AB laat wentelen, dan ontstaat een omwentelingsoppervlak, dat blijkbaar door P gaat. Den tweeden cirkelboog, die den eersten aanvult tot een vollen cirkel, moet men weg laten, want van de punten van dezen uit ziet men AB onder het supplement van den gemeten hoek.

Een dergelijk omwentelingsoppervlak krijgt men nu om AC, en zoo heeft men twee omwentelingsoppervlakken met elkaar snijdende assen met elkaar te snijden, zoodat men een stel hulpbollen moet aanbrengen om A. Dit snijden gaat gemakkelijk, omdat zulk een bol het oppervlak met as AB volgens een cirkel snijdt, welks vlak evenwijdig is aan het vertikale projectievlak.

Aan het punt B ontmoet men nogmaals het oppervlak met as BA, en een nieuw met as BC; en zoo laat zich inderdaad zonder al te veel moeite het punt P vinden.

De omwentelingsvlakken, met die wij hier te doen krijgen, zijn van den 4en graad, en nu maakt Monge, gebruik makende van het theorema dat aan zijn voorganger Bezout toebehoort, de opmerking dat, theoretisch gesproken, het aantal punten P 64 bedraagt, maar dat, aangezien van elk oppervlak slechts één blad gebruikt, en het andere weggelaten wordt, dit aantal zich reduceert tot 8. Beide getallen zijn er volkomen naast, want de algebraische Meetkunde was nog lang niet ver genoeg gevorderd om het mogelijk te maken hier het juiste getal 24 te vinden. Men moest leeren inzien — nieuwe triomf van het invoeren van het imaginaire in de Meetkunde — dat de drie hier bedoelde vierdegraadsoppervlakken intrinsiek niet verschillen van drie andere, die elk tweemaal door één en dezelfde kegelsnede gaan; daarna vindt men gemakkelijk het getal 24. En met brokstukken van oppervlakken kan men in het geheel niet rekenen. De geheele kwestie is trouwens van zuiver theoretischen aard; in de praktijk voldoet immers slechts één punt, en waar dit ongeveer ligt, ziet men indien men er zelf staat.

26. Het laatste vraagstuk, dat de groote schrijver bespreekt, heeft bepaald iets dramatisch. Men luistere.

„Le général d'une armée en face de l'ennemi n'a pas là carte du pays occupé par celui-ci, et il en a besoin pour faire le plan d'une attaque qu'il médite. Il a un aérostat. Il charge un ingénieur de s'élever avec l'aérostat, et de prendre toutes les mesures nécessaires pour faire la carte, et pour en donner un nivellement approché: mais il a lieu de croire que si l'aérostat changeait de station sur le terrain, l'ennemi s'apercevrait de son dessein; en conséquence il permet à l'ingénieur de s'élever à différentes hauteurs dans l'atmophère, si cela est nécessaire; mais il lui defend de changer de station à terre. L'ingénieur est muni d'un instrument propre à mesurer les angles, et cet instrument est garni d'un fil-à-plomb: on demande comment l'ingénieur pourra exécuter les ordres du général".

In de beschrijving van de oplossing zijn een paar vergissingen geslopen, die echter gemakkelijk te herstellen zijn; zij komt neer op het snijden van omwentelingskegels met dezelfde as, maar verschillende toppen, òf denzelfden top, maar verschillende assen. Maar men kan óók werken met „anglés, réduits à l'horizon".

Monge was een groot geometer; de Geometrie beheerschte zijn geheele wezen. Maar daarnaast legt hij een zoo verbluffende analytische virtuositeit aan den dag, dat men hem slechts ten halve kent indien men hem alleen als geometer kent.

DIAGRAM OF GRAFIEK?

DOOR

P. WIJDENES.

Allerlei statistische gegevens worden meetkundig voorgesteld; het voordeel is, dat men met één oogopslag meer ziet, dan dat men leest in lange rijen getallen. De figuren zijn verschillend, daar de te verwerken gegevens verschillend zijn. Ongeschoolden, zelfs zij, die geen flauw besef hebben van wiskunde, kunnen die even goed lezen en ook maken als wij; een landbouwconsulent zal bv. bij een lezing diagrammen kunnen geven over vetgehalte van de melk, over opbrengst van het land bij verschillende bemesting; enz. Met wiskunde heeft een diagram niets uit te staan.

Het lezen en maken van eenvoudige lijn- en vlakdiagrammen, is een zaak van de lagere school [1]), van nijverheidsscholen [2]), van minder eenvoudige, met een overzicht van de verschillende vormen van diagrammen, van de H.B.S. A.

Als men diagrammen maakt met een horizontale as en een vertikale, heeft men op beide een verdeling bv.

diverse vervoermiddelen . . . . snelheid per tijdseenheid;
bevolking van een land . . . . achtereenvolgende volkstellingen;
tonnenmaat van in- en uitgaande zeeschepen;
nadelige en voordelige saldi op de staatsbegroting;
geboorte, sterfte, huwelijken;
verloren arbeidsdagen voor de werknemers;
indexcijfers van groothandelsprijzen.

Bij de laatste vijf wordt het verloop nagegaan gedurende zekere tijden; zet men die van links naar rechts op een as uit, dan zal inkrimping daarvan een ander beeld geven dan bij uitrekking,

---

[1]) Zie Donkersloot en Van Slooten Nieuw Rekenboek voor opleidingsscholen; stukje VI B.

[2]) Zie P. Wijdenes Algebra voor Nijverheidsscholen 3e druk.

maar de zaak verandert er niet door. Men is volkomen vrij in de keuze van de onderlinge afstanden op de ene as; evenals in de maat van de eenheden, duizendtallen inwoners, millioenen tonnen, percenten enz. op de andere as. Al die voorstellingen, waarbij geen verband bestaat tussen de maten op beide assen, noemen we *diagrammen;* ook elke andere verwerking van statistische gegevens, in cirkels bv.

Het is m.i. volstrekt onnodig, zich in de wiskunde bezig te houden met het maken van diagrammen; door er een enkele te geven als aanloop om tot de grafieken te komen, voldoet men al ruimschoots aan wat misschien als behoefte gevoeld kan worden.

Grafische voorstellingen op twee onderling rechthoekige assen zijn te verdelen in twee soorten: 1) die, waarbij de verdelingen op beide assen niets met elkaar te maken hebben; 2) die, waarbij ze in dezelfde eenheid zijn uitgedrukt; de eerste noemen we voortaan (ook op school) *diagrammen,* de tweede *grafieken.* Grafieken zijn meetkundige voorstellingen van $y = f(x)$; we tekenen $y = px + q$, $y = ax^2 + bx + c$ enz. Zet men op de X-as eenheden uit van 1 cm, op de Y-as 2 cm? Niemand doet dat, natuurlijk niet. Iets anders schijnt de zaak te zijn, als men geen algebraische, maar een goniometrische functie afbeeldt; natuurlijk kan men waarden van sin x (laten we ons daartoe beperken) voor verschillende waarden van x uitzetten; op de horizontale as zet men *graden,* op de vertikale *eenheden;* men maakt dan echter een diagram en geen grafiek en men bedriegt de lezers door er onder of op de figuur er naast te zetten *sinuslijn;* want met de sinuslijn kan men bezwaarlijk anders bedoelen dan de grafiek van $y = \sin x$.

We geven hier een drietal figuren uit boeken, die de „grafieken" trachten te geven; alleen de pijlen zijn er bij getekend.

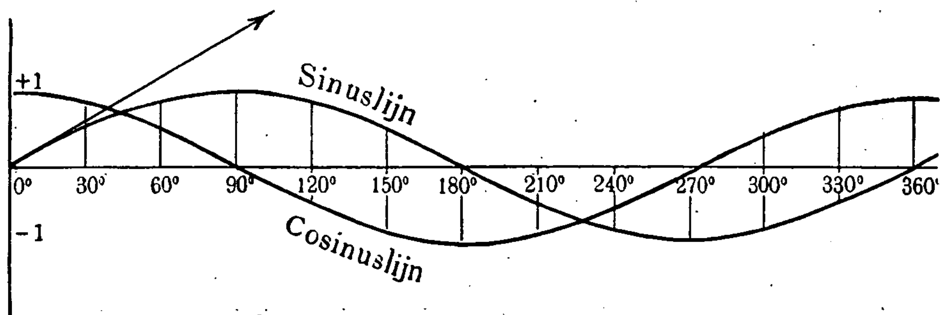


Fig. 1. Een uitgerekte sinuslijn.

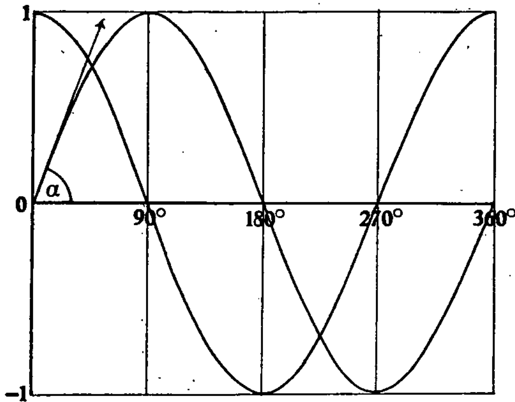


Fig. 2. Een ingedrukte sinuslijn.

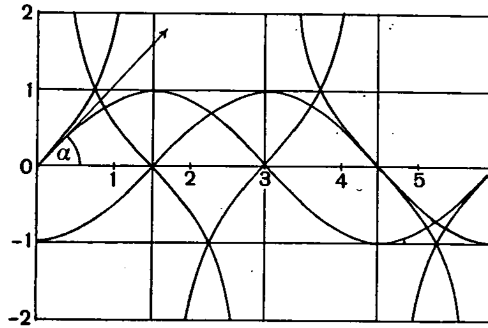


Fig. 3. Allemaal diagrammen.

Fig. 1 is getrouw overgenomen, behalve de gekleurde ondergrond; fig. 2 is op de helft verkleind; fig. 3 is op de helft verkleind echter zonder de mm-verdeling; op 2 en 3 staat in de boeken wat meer dan op deze figuren; daarom is het ons niet te doen.

Het is waar, op een diagram ziet men alle waarden, de uiterste waarden, de nulpunten, het rijzen en dalen en . . . . toch geeft de uitgerekte figuur 1, al staat er „sinuslijn" bij, de sinuslijn niet, evenmin als fig. 4 de tangenslijn voorstelt. Ook op fig. 3 heeft men bedoeld de tangenslijn te tekenen; het staat er op de figuur in het boek bij, maar het is een bedrieglijke voorstelling. Of dat nu zoveel hindert?

Het is een goede didactiek om bij het behandelen van de differentiaalrekening niet alleen af te leiden, maar ook te laten zien: het differentiaalquotient van een functie voor zekere waarde van de onafhankelijk veranderlijke is gelijk aan de tangens van de hoek, die de raaklijn aan de grafiek van de functie in het bijbehorend punt maakt met de positieve as van de onafhankelijk veranderlijke.

Bij het lesgeven moet men daar de volle aandacht aan besteden en ook echt laten aflezen op een grafiek, dat het „uitkomt". Op fig. 1 willen we met de leerlingen dus de richting van de kromme in O eens laten „zien"; de afgeleide van sin x is cos x; in O dus cos $0 = 1$; dat is: de raaklijn aan de kromme in O moet een hoek van 45° met de X-as maken. Op fig. 1 is de hoek 29° met een tangens van 0,55 ongeveer; op fig. 2 is de hoek 70° met een tangens van 2,75; op fig. 3 is de hoek ruim 47°, waarvan de tangens ongeveer 1,1 is. Natuurlijk klopt de zaak in geen enkel

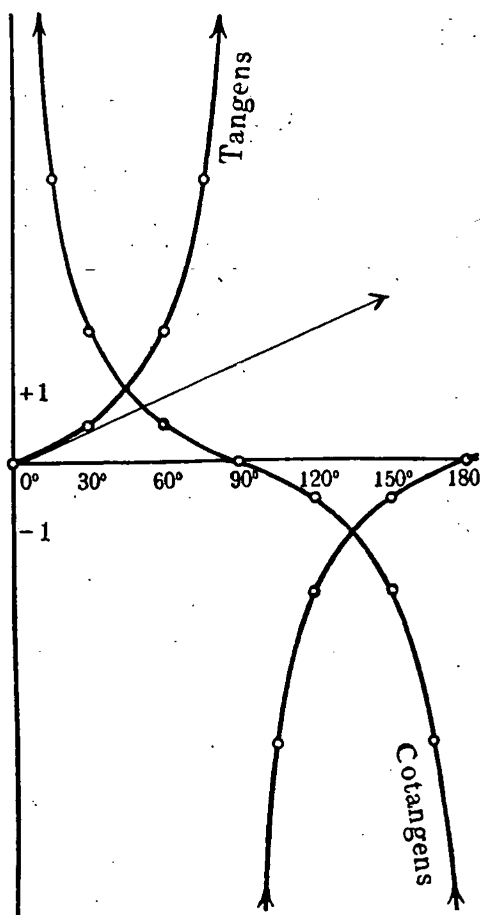


Fig. 4. Dit is niet de grafiek van de tangens.

punt, behalve dan in de punten, waar de raaklijn evenwijdig is aan de X-as. De kromme van fig. 1 is een diagram; van fig. 2 en 3 ook; diagrammen kan men zoveel tekenen, als men wil (in hetzelfde boek, waarin fig. 1 voorkomt, komt er een andere voor en ook daar staat bij, dat het de sinuslijn is!); *er is echter maar één lijn* $y = \sin x$; zie fig. 5.

De x en de y moeten in dezelfde eenheid worden uitgedrukt; men meet de omtrek van de cirkel met stralen en zet zo goed mogelijk op de X-as 2π uit (daarvoor zijn de benaderingsconstructies van π; ook in de beschrijvende meetkunde heeft men er wel eens behoefte aan om $2\pi r$ stralen op een rechte lijn af te zetten). Bij de oefeningen op school gebruike men het maatlatje om $2\pi r$ uit te zetten; dat men daarna de X-as van O tot 2π in 12 gelijke delen verdeelt en er graden bij zet, is bij eerste kennismaking met de grafieken aan te bevelen (de radialen komen later), vooral ook, omdat men dan zo'n eenvoudige constructie krijgt van $y = \sin x$, enz.; zie fig. 5.

Laten we fig. 4 nog eens bekijken; er staat bij, dat het de tangens voorstelt, waarmee bedoeld zal zijn, dat fig. 4 de grafiek geeft van $y = \operatorname{tg} x$ en $y = \operatorname{cotg} x$; een diagram of een grafiek? Alweer een diagram; zeker: de nulpunten komen uit; dat er een buigpunt is bij 180° ook, stijging is er, maar . . . . de eenheden op de X-as en de Y-as zijn niet dezelfde; deze figuur is als een harmonica uitgerekte $y = \operatorname{tg} x$. Ook kan men zeggen,

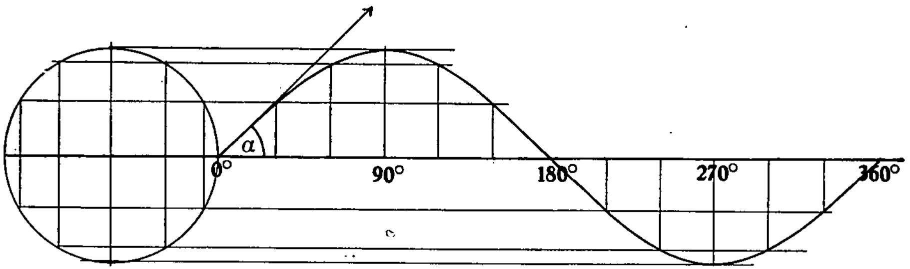


Fig. 5. Dit is $y = \sin x$.

dat de figuren 1, 2 en 3 niet $y = \sin x$ geven, maar $y = a \sin x$; op fig. 1 is a ongeveer 0,52, op fig. 2 is $a = 2{,}1$ en op fig. 3 is $a = 1{,}05$. *Wat mag de dringende reden zijn a sin x te tekenen, als men sin x wil voorstellen blijkens bijschriften en tekst?? En op welke overwegingen rust de keuze van die a??* De afgeleide van $y = \operatorname{tg} x$ is $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; voor $x = 0$ is dus de tangens van de hoek, die de raaklijn met de X-as maakt, 1; fig. 4 geeft een hoek van 24°, waarvan de tangens 0,42 is!

Hetzelfde wat anders voorgesteld: we moeten de jongens thans leren, dat $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ is; wat zegt dat op fig. 5 van het driehoekje, waar α in staat? Hoe zit dat op de figuren 1, 2, 3 en 4?

In Versluys Tafel H ziet men naast elkaar de bogen en hun sinussen en tangenten; welnu: men vindt bij 0,035 (ongeveer 2°) slechts een afwijking van 1.10^{-5}!

Het is met heel geringe moeite mogelijk om $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, enz. goed te tekenen; er is bij de goniometrische functies geen enkele reden, zo ver ik zie, om een diagram te geven in plaats van de juiste voorstelling van $y = f(x)$; het kost niet meer moeite een zuivere grafiek te tekenen dan zo maar wat. Voor de leerlingen, die verwrongen diagrammen hebben gezien in hun schoolboek moet het een eigenaardige gewaarwording zijn, als ze in de Natuurkunde en later bij voortgezette studie ontwaren, dat $y = \sin x$ er anders uitziet, dan in hun boek voor driehoeksmeting. Of het diagram een sterk mistekende grafiek voorstelt (fig 1, 2 en 4) of weinig afwijkt van de juiste vorm, zoals fig. 3, waarop 12 cm in plaats van $2 \times 2\pi$ cm is genomen, doet er niet toe; als er niet op gewezen wordt en er niet naar gehandeld is, abscis en ordinaat in dezelfde lengtemaat uit te drukken, dan geeft men een diagram in plaats van een grafiek.

ZIJN ONZE LEERBOEKEN GOED?

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT.

Wanneer ik in de volgende regelen het een en ander wil zeggen over onze leerboeken, ben ik mij er volkomen van bewust daarmee een zeer teere kwestie aan te roeren. Ik zie al verschillende schrijvers van leerboeken het voorhoofd fronsen, als zij het opschrift, dat hierboven staat lezen en vermoedelijk staat menigeen van hen al bij voorbaat afwijzend tegenover de kritiek, die er nu wel weer op hun boeken zal uitgeoefend worden.

Daarom wil ik terstond enkele opmerkingen vooraf laten gaan, die wellicht in staat zijn enige wrevel, die soms à priori heeft post gevat, te doen verdwijnen.

In de eerste plaats toch zijn de opmerkingen, die ik ga maken niet gericht tegen enig bepaald boek. Ik meen, dat ze gelden ten opzichte van vrijwel al onze tegenwoordige leerboeken voor H.B.S. en Gymnasium. Ik ben dus overtuigd niemand persoonlijk te zullen grieven en heb bovendien wel zo veel vertrouwen in mijn collega's, dat ik niet kan aannemen, dat zij allen voor rustige kritiek een gesloten oor zouden hebben.

Daar komt nog bij, dat ik allerminst van plan ben uitsluitend afbrekende kritiek te leveren en al het bestaande botweg ongeschikt te verklaren. Ten derde geeft een ruim 28-jarige ervaring bij het gymnasiaal en middelbaar onderwijs wel enige waarborg, dat, als ik in sommige opzichten kritiseer, dit niet zo maar geschiedt, maar dat ik lang genoeg gewacht heb er mee voor den dag te komen.

Na deze inleidende woorden hoop ik, dat vele collega's — en vooral ook zij, die wel eens een of meer leerboeken het licht lieten zien —, deze bladzijden zullen willen lezen en rustig overwegen of er wellicht hier en daar bezwaren geuit worden, die toch wel de moeite van het overwegen waard zijn. Tevens kan er dan ook over gedacht worden of het middel, dat ik hoop aan te geven om

die bezwaren te ondervangen, misschien voor verwezenlijking vatbaar is.

De vraag „Zijn onze leerboeken goed?" is voor verschillende beantwoording vatbaar. De twee, die mij wel het belangrijkst schijnen, wil ik onder het oog zien. Men kan nl. zich op wetenschappelijk standpunt stellen en van daaruit de vraag beantwoorden, terwijl daarnaast ook een antwoord gegeven kan worden uit paedagogisch gezichtspunt. Dat het uiterlijk van het boek aan bepaalde eisen moet voldoen, dat het met een duidelijke letter gedrukt moet zijn en soortgelijke kwesties, laat ik vanzelfsprekend rusten. De uitgevers zorgen wel, dat aan deze voorwaarden behoorlijk voldaan is!

Trachten we een antwoord op de vraag te geven uit het eerstgenoemde gezichtspunt, dan kan dit bezwaarlijk anders dan bevestigend luiden. Wanneer men als eis stelt, dat uit het leerboek moet blijken, dat de bewerker op de hoogte van zijn vak is, dat hij wetenschappelijk „bij" is, dan geloof ik dat van verschillende van onze leerboeken gezegd kan worden, dat ze goed zijn. Ze zijn tegenwoordig zó goed, dat een pasbeginnend leraar — die helaas op de colleges aan de Universiteit weinig of niets geleerd heeft van het deel van zijn vak, dat hij nu moet gaan doceren —, van die beginselen grondig op de hoogte kan komen door maar eens een paar leerboeken door te werken. Vooral voor jonge leraren zijn onze schoolboeken bijzonder goed geschikt.

Maar juist daarom zal het antwoord op de gestelde vraag niet zo onverdeeld gunstig luiden, als we die van paedagogisch standpunt bekijken. Want naarmate de boeken meer geschikt zijn voor beginnende docenten, zijn ze minder aangepast aan de capaciteiten van onze leerlingen, die toch allen nog kinderen zijn. Dit geldt in het bijzonder voor de lagere klassen, voor welke onze schoolboeken in het algemeen te moeilijk zijn. En ik vrees, dat de invoering van het nieuwe programma voor de H.B.S. dit euvel nog in de hand zal werken. Waarmee ik volstrekt niet gebrandmerkt wil zijn als tegenstander van het nieuwe leerplan; ik wens alleen maar te waarschuwen tegen overdrijving. Wanneer men bijvoorbeeld de ontwikkeling van het getal-begrip in de Wiskunde wil behandelen, kan ik mij daar best mee verenigen, als dit gebeurt in de hogere klassen. En dan moet het nog op zeer eenvoudige wijze geschieden en niet in al te abstracte mathematische vorm.

Wanneer men differentiaal-rekening wil behandelen, kan dat zeker groot nut afwerpen, in het bijzonder als het gedaan wordt als inleiding op de Mechanica. Maar tevens is het toch heel erg nodig zich te beperken tot die hoofdzaken, die in de elementaire mechanica en natuurkunde nodig zijn. Zo acht ik b.v. ook een al te abstract wiskundige behandeling van het limiet-begrip voor de leerlingen zeker te moeilijk.

Juist het te moeilijk zijn voor de leerlingen van onze schoolboeken kan er zo licht toe leiden de dingen, die boven hun begrip gaan, maar domweg uit het hoofd te leren, een euvel, dat tegenwoordig waarlijk niet sporadisch voorkomt! Een wat meer gewone alledaagse inkleding van de kwestie had het waarschijnlijk mogelijk gemaakt er meer van te snappen en het dus beter in zich op te nemen.

Een groot bezwaar acht ik ook de te grote uitvoerigheid van de boeken. Het heeft soms wel de schijn alsof de ene auteur den ander tracht te overtroeven door nog maar weer enige kwesties wat uitvoeriger te behandelen of nieuwe problemen op te nemen, die in het boek van den concurrent niet voorkomen. Misschien kan ik dit het beste met enkele voorbeelden toelichten.

Nu de Algebra niet alleen voor het gymnasium, maar ook voor de H.B.S. B is uitgebreid met de grafieken, zal het nodig zijn andere onderwerpen flink te beperken. Gelukkig zijn verschillende auteurs zich daarvan bewust en in vele boeken zijn de wortelvormen sterk ingekrompen. Ik vraag mij echter af of hier niet nog wat meer te bezuinigen zou zijn en of er nog geen andere gebieden zijn, die besnoeid kunnen worden. Ik denk b.v. aan de ingeklede vraagstukken, die door één of meer vergelijkingen (inclusief vierkantsvergelijkingen) kunnen worden opgelost; aan het herleiden van grote vormen met oneigenlijke machten; ingewikkelde logarithmische en exponentiële vergelijkingen; samengestelde interest, waar veel bekort kan worden door het gebruik van rente-tafels en het schrappen van tal van ingewikkelde vraagstukken.

Wanneer in een Stereometrie-boek in de theorie het orthocentrisch viervlak uitvoerig behandeld wordt, vraag ik mij toch af: „wil men, dat de leerlingen dit alles paraat hebben?" en zo niet, waarom het dan in de theorie opgenomen? Ook een uitvoerige behandeling der regelmatige veelvlakken met formules voor de stralen van in- en omgeschreven bollen kan toch zeker gevoeglijk achter-

wege blijven. Hetzelfde geldt voor sommige onderdelen van de Planimetrie. Die zal nu worden uitgebreid met meetkunde van de kegelsneden. Ook hier zal zeer ernstig onder het oog moeten worden gezien met hoe weinig men hier kan volstaan; terwijl hier bovendien het grote gevaar dreigt om langs dit achterdeurtje tersluiks wat Analytische Meetkunde binnen te loodsen!

Ook bij de Beschrijvende Meetkunde sta ik wel eens verbaasd als ik al die dikke boeken zie, die de leerlingen moeten doorworstelen, terwijl alles wat ze nodig hebben gemakkelijk in een klein, dun boekje kan staan. Zulke kleine leerboeken bestaan er gelukkig wel enkele en ik prijs de leerlingen en den leraar gelukkig, die ze gebruiken.

Wat de Mechanica betreft, geldt al ongeveer hetzelfde als voor de Wiskunde. Hier is een wiskundige inleiding, waarin de hoofdzaken van de differentiaal-rekening en vectoren behandeld worden, zeker op zijn plaats. M.i. is dat dan ook juist de plaats waar die differentiaalrekening thuishoort! Maar waar er behalve enkele reeds verschenen boeken nog wel verschillende andere het licht zullen zien, mag hier ook wel ernstig gewaarschuwd worden, dat men zich hier moet beperken tot *die* hoofdzaken, die in de elementaire Mechanica nodig zijn.

Eigenaardig is, dat sommige schrijvers het te veel en te moeilijk ook wel degelijk inzien! Zij laten sommige stukken in hun leerboeken met kleine letter drukken en voegen er bij, dat die gedeelten ook wel kunnen worden overgeslagen! Maar wat heeft de leerling daar dan aan?

Zou er verder bij de Mechanica niet beperkt kunnen worden bij de behandeling van een groot aantal zwaartepunten en van tal van werktuigen, die voor degenen, die in de techniek doorgaan toch later uitvoeriger besproken worden en die voor het eindexamen H.BS. overbodig zijn? Ik geloof, dat we die behandeling met een gerust hart aan de Middelbaar Technische school kunnen overlaten.

Dat bij de Natuurkunde dezelfde opmerking over het drukken met kleine letter gemaakt kan worden, is zonder meer wel duidelijk. Dat overigens juist de Natuurkunde heel dringend beperking en korte behandeling nodig heeft, is dunkt mij wel zeer vanzelf sprekend. Aan het eind van de klassieke Natuurkunde, zoals die op onze scholen behandeld wordt, ligt een geheel nieuw gebied. Ik denk natuurlijk aan atoomtheorie, verband tussen het spectrum

en de atoombouw, het periodiek systeem, dat ook beter bij de natuurkunde dan bij de scheikunde behandeld kan worden enz. Vooral de jongere physici onder onze collega's zullen er naar hunkeren eens iets daarvan met de leerlingen te behandelen. En zij zullen spoedig de ervaring opdoen, dat zij er niet aan toekomen, of geen goede resultaten bij het eindexamen bereiken, omdat ze het oude te veel verwaarloosden. Kortom, bij een vak als Natuurkunde, dat zich zo snel uitbreidt, moet sterk ingekrompen worden. Onderwerpen op te noemen, waar gemakkelijk besnoeid zou kunnen worden, is niet lastig. Behandeling van allerlei soorten van pompen kan gevoeglijk achterwege blijven zonder het natuurkundig inzicht van de leerlingen te schaden. Met het principe van de thermometer kan worden volstaan, terwijl wel niemand er veel aan zal missen als de gewichtsthermometer niet meer behandeld wordt. Er zijn natuurkunde-boeken, die lange beschouwingen geven over verschijnselen in de atmosfeer (sneeuw- en hagelvorming, nevels, wolken enz.). Dat kan gerust daaruit gemist worden en overgelaten aan de natuurkundige aardrijkskunde. Zo kan de bouw van het menselijk oog beter door den bioloog behandeld worden en kan de physicus zich bepalen tot de afwijkingen van het oog en de opheffing daarvan door brillen. Bij 't geluid zien we soms bladzijden besteed aan de behandeling der toonladders (gelijkzwevende temperatuur), wat prachtig is voor a.s. musici, maar de meeste leerlingen niets interesseert en uit natuurkundig oogpunt gerust kan worden weggelaten. Zo zouden er vermoedelijk nog wel meerdere onderwerpen te noemen zijn.

Waar ik hier de nadruk op wil leggen is, dat onze natuurkunde-boeken wel heel nauwkeurig en fraai zijn, maar zó uitvoerig, dat hun uitgebreidheid ze voor de leerlingen onoverzichtelijk maakt en dat zij daardoor dikwijls de hoofdzaken niet van de bijzaken weten te onderscheiden.

Wat tot nu toe gezegd is betreffende de Wiskunde, Mechanica en Natuurkunde geldt evenzeer voor Scheikunde en Plant- en Dierkunde. Een Scheikunde-boek, dat al heel spoedig de zeer moeilijke kwesties van de physische chemie als dissociatie, concentratie, theorie van het chemisch evenwicht enz. behandelt, is misschien wetenschappelijk uitmuntend, maar voor leerlingen veel te moeilijk. Hoe zullen ze deze kwesties begrijpen, als ze ternauwernood een gewone reactie-vergelijking kunnen opstellen en

daarin ook nog veel te weinig routine hebben? Ik zal mij niet verder wagen in bijzonderheden op het gebied der chemie, dat het mijne niet direct is, maar ben overtuigd, dat ieder chemicus ook tal van onderwerpen in de boeken zou kunnen aanwijzen, die — bijzaken zijnde — gevoeglijk gemist kunnen worden.

En als we de dikke boeken over Plant- en Dierkunde zien, rijst dezelfde vraag, welks beantwoording ik gaarne aan den bioloog overlaat: Was het niet beter, dat uit die veelheid de hoofdzaken gelicht werden en alle ballast overboord werd geworpen?

Al zal ik mij vanzelfsprekend niet begeven op het terrein van andere vakken als Geschiedenis, Staathuishoudkunde, Staatsinrichting, ik ben toch overtuigd, dat het daar met de leerboeken niet anders gesteld is. Zelfs zou ik de collega's classici in gemoede willen vragen of er op al de grammaticale finesses, die met de leerlingen behandeld worden, omdat ze nu eenmaal in de boeken staan, niet belangrijk zou kunnen worden bezuinigd!

Naar ik hoop, zal het mij gelukt zijn aan te tonen, waarom naar mijn mening onze leerboeken enerzijds te moeliijk, andererzijds te uitvoerig zijn.

Wanneer ik nu wil trachten een middel aan te wijzen, dat hierin verbetering kan brengen, zal dit niet voor alle vakken hetzelfde kunnen zijn. Ik zou b.v. de wiskunde-boeken niet willen bekorten door er minder vraagstukken en voorbeelden in op te nemen. Alle vraagstukken behoeven niet gemaakt te worden en het is voor den leraar wel heel aangenaam, als hij het ene jaar eens andere vraagstukken kan kiezen als in het andere. Hier zou ik vooral willen aandringen op een zo eenvoudig mogelijke formulering van de theorie. Laat het dan desnoods maar eens wat minder wetenschappelijk klinken, als de leerlingen de gebruikte terminologie beter begrijpen, is er toch veel gewonnen.

Anders ligt de zaak bij andere vakken, zoals bijv. de Natuurkunde. Ik ben overtuigd, dat hier velen en daaronder van de beste docenten, de uitgebreidheid der leerstof trachten te beperken door het geven van een dictaat. Die methode is op zich zelf natuurlijk uitstekend, maar kost enorm veel tijd. En mijn mede-docenten, die deze weg bewandelen, zullen het met mij eens zijn, dat het heel wat moeite kost om het programma in de daarvoor gestelde tijd af te werken. Ik zou daarom als middel tot verbetering bij dergelijke vakken willen voorstellen de uitgave van een leerboek in de

vorm van een uitgebreid dictaat. Dit moet dan zo ingericht worden, dat een leerling, die dat boekje grondig bestudeerd heeft, aan die kennis voldoende heeft om voldoende op zijn eind-examen te halen.

Wil men dan om bepaalde redenen toch een uitgebreid leerboek handhaven, hetzij voor den leraar, hetzij voor het naslaan door den leerling, het zij zo; maar laat men daarnaast dan de klasse het door mij bedoelde kleinere boekje in handen geven, zodat zij de stof, die zij paraat moeten hebben, geordend voor zich krijgen en niet uit de grote massa behoeven te destilleren. Mij dunkt, het kan niet anders of dit moet de resultaten van ons onderwijs ten goede komen. Om te laten zien, hoe ik mij een dergelijk uiterst beknopt boek voorstel, laat ik hieronder een proeve volgen, waarin ik zeer in het kort het hoofdstuk „Geluid", behandel.

Geluid.

Het geluid plant zich in gassen voort met een *longitudinale* golfbeweging. (In gassen is geen transversale golf mogelijk, omdat de moleculen zich geheel vrij van elkaar bewegen).

Voortplantingssnelheid van het geluid volgens La Place:

$$v = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \times \frac{p}{s}(1+\alpha t)}.$$

Hierin is: c_p = soortelijke warmte bij constante druk; c_v = soortelijke warmte bij constant volume; p = spanning van het gas in dynes; s = soortelijk gewicht, $1+\alpha t$ = het dilatatie-binomium.

Het schijnt dus, alsof v afhankelijk is van de druk; dit is niet zo, want als p bijv. 2 $\times$ zo groot wordt, wordt ook s 2 $\times$ zo groot, en blijft $\frac{p}{s}$ dus constant. Dus v hangt alleen af van de temperatuur en is evenredig met $\sqrt{1+\alpha t}$.

Voor twee-atomige gassen is $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}4$.

Voor vaste lichamen geldt:

$$v = \sqrt{\frac{E}{s}(1+\alpha t)},$$

waarin E de elasticiteitsmodulus is.

Een toon wordt onderscheiden naar 3 grootheden, nl. *de sterkte, de hoogte* en *de klank.*

De *sterkte van de toon* hangt af van het arbeidsvermogen van het trillende voorwerp. We vonden vroeger, dat dit weer evenredig is met het kwadraat van de amplitudo.

Toonhoogte hangt af van het aantal trillingen (n) per seconde. Hoe groter n, hoe hoger de toon.

Toonhoogte wordt bepaald met de sirene van *Cagniard de Latour*: Een schijf met gaten (in een cirkel) draait boven het deksel van een doos; in het deksel zitten evenveel gaten. Telkens als de gaten boven elkaar komen, ontstaat er door de ontsnapping van de lucht een luchtstoot.

't Aantal luchtstoten per sec. = aantal trillingen van de toon. Is dus b.v. het aantal gaten p en maakt de schijf n omwentelingen per sec., dan is het aantal trillingen per sec. $= n \times p$.

De *klank* wordt bepaald door het meeklinken van boventonen.

Orgelpijpen. I. *Open orgelpijp.*



Grondtoon	1e boventoon	2e boventoon	3e boventoon
b	*b*	*b*	*b*
		kn	*kn*
	kn		*b*
		b	*kn*
kn	*b*	*kn*	*b*
		b	*kn*
	kn		*b*
		kn	*kn*
b	*b*	*b*	*b*

Doordat de ingeblazen lucht bij A stuit, raakt de luchtkolom in longitudinale trilling; bij B terugkaatsing tegen een vrij uiteinde; er ontstaat dus een staande trilling.

Naast de orgelpijp is aangegeven, hoe de verdeling in knopen en buiken bij grondtoon en boventonen is.

Noem de golflengten van de grondtoon enz.: λ_0, λ_1, λ_2 en de lengte van de pijp L. Dan is: $L = \frac{1}{2}\lambda_0$ dus $\rightarrow \lambda_0 = 2$ L.

$$L = \lambda_1 \rightarrow \lambda_1 = L$$
$$L = {}^3/_2\,\lambda_2 \rightarrow \lambda_2 = {}^2/_3\,L$$
$$L = 2\,\lambda_3 \rightarrow \lambda_3 = {}^1/_2\,L.$$

Dus: $\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 2 : 1 : {}^2/_3 : {}^1/_2$.

De trillingsgetallen zijn omgekeerd evenredig met de golflengten $\left(v = n\lambda, \text{ dus } n = \frac{v}{\lambda}\right)$, derhalve:

$$n_0 : n_1 : n_2 : n_3 = {}^1/_2 : 1 : {}^3/_2 : 2.$$
$$= 1 : 2 : 3 : 4. \qquad (\textit{Bernouilli}).$$

II. *Gesloten orgelpijp.*



Grondtoon	1e boventoon	2e boventoon	3e boventoon
kn	*kn*	*kn*	*kn*
		b	*b*
	b		*kn*
		kn	*b*
		b	*kn*
	kn		*b*
		kn	*kn*
b	*b*	*b*	*b*

Nu ontstaat bij B (vast uiteinde) een knoop.

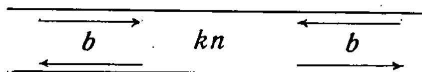
Nu is:
$$L = {}^1/_4\,\lambda_0 \rightarrow \lambda_0 = 4\,L$$
$$L = {}^3/_4\,\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 = {}^4/_3\,L$$
$$L = {}^5/_4\,\lambda_2 \rightarrow \lambda_2 = {}^4/_5\,L$$
$$L = {}^7/_4\,\lambda_3 \rightarrow \lambda_3 = {}^4/_7\,L$$

Dus $\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 4 : {}^4/_3 : {}^4/_5 : {}^4/_7$

of: $n_0 : n_1 : n_2 : n_3 = 1 : 3 : 5 . 7$ (*Bernouilli*).

Als een gesloten en een open orgelpijp even lang zijn, is de golflengte van de grondtoon van de gesloten pijp 2 × zo groot als die van de grondtoon van de open pijp. De grondtoon van de gesloten pijp is dus het lagere octaaf van die van de open pijp.

In de knopen van een luchtkolom, die in staande, longitudinale trilling is, vindt achtereenvolgens verdichting en verdunning plaats:



De beweging in de buiken aan weerszijden van een knoop is nl. tegengesteld.

De verdichtingen en verdunningen in de knopen worden aangetoond door de proef van *König* (orgelpijp met vlammetje en draaiende spiegel).

Snaren.

Het trillingsgetal van de grondtoon van een snaar wordt voorgesteld door de formule:

$$n = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{s \times d}}.$$

Hierin is: L = lengte van de snaar in cm;
P = het spannend gewicht in dyne's;
s = het soortelijk gewicht van het materiaal;
d = de oppervlakte van de doorsnede in cm^2.

n is dus: omgekeerd evenredig met de lengte;
recht evenredig met de wortel uit de spanning;
omgekeerd evenredig, met de wortel uit de oppervlakte van de doorsnede, dus ook omgekeerd evenredig met de dikte van de snaar.

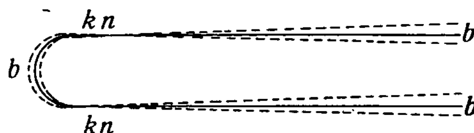
Verband tussen trillingsgetallen van grond- en boventonen: (teken deze zelf!).

Grondtoon	$L = \frac{1}{2}\lambda_0$	$\lambda_0 = 2\,L$
1e boventoon	$L = \lambda_1$	$\lambda_1 = L_1$
2e boventoon	$L = \frac{3}{2}\lambda_2$	$\lambda_2 = \frac{2}{3}\,L$
3e boventoon	$L = 2\,\lambda_3$	$\lambda_3 = \frac{1}{2}\,L.$

Dus: $\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 2 : 1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$
$n_0 : n_1 : n_2 : n_3 = \frac{1}{2} : 1 : \frac{3}{2} : 2$
$= 1 : 2 : 3 : 4.$

Stemvork.

Een stemvork is te beschouwen als een trillende omgebogen staaf. Tillingstoestand als volgt:



Platen.

Trillende platen (en klokken) vertonen lijnen, die in rust blijven (knooplijnen). De plaatsen daartussen zijn in beweging. (Platen van Chladni).

Aan weerszijden van een knooplijn is de beweging tegengesteld.

Resonantie.

Wordt in de nabijheid van een stemvork of een snaar de toon voortgebracht, die deze zelf kan geven, dan gaat de stemvork of snaar zelf meetrillen. Dit heet *resonantie.*

Hetzelfde is het geval met de luchtkolom in de klankkast onder een stemvork, of ook met een cylindrische luchtkolom, die afgestemd is op een stemvork.

Zet men het ondereinde van een stemvork op de tafel, dan wordt het geluid versterkt: de tafel gaat mee-resoneren.

Helmholz construeerde z.g. klankbollen, die meeklinken op bepaalde tonen, die in de uitgesproken klinkers voorkomen.

Bij een *fonograaf* loopt een stift over een cylinder (of schijf), waarin zich een groef bevindt, die ontstaan is door het geluid eerst voort te brengen voor een trilplaat, die verbonden was met een stift, die de indrukken in was vastlegt. Omgekeerd deelt nu de stift dezelfde trillingen aan de trilplaat mee, die dan hetzelfde geluid voortbrengt.

Zwevingen.

Stel, dat twee tonen weinig verschillen, bijv., 300 en 303 trillingen per sec. maken.

Stel, op een gegeven tijdstip trillen ze gelijk en versterken dus elkaar.

Na $^1/_6$ sec. heeft de ene 50 trillingen en de andere $50^1/_2$ trilling volbracht. Het verschil is $^1/_2\lambda$, dus verzwakking (uitdoving).

Na $^1/_3$ sec.	opv.	100	en	101	trillingen;	verschil	λ:	versterking.
Na $^3/_6$ sec.	„	150	„	$151^1/_2$	„ ;	„	$1^1/_2\lambda$:	uitdoving.
Na $^4/_6$ sec.	„	200	„	202	„ ;	„	2λ:	versterking.
Na $^5/_6$ sec.	„	250	„	$252^1/_2$	„ ;	„	$2^1/_2\lambda$:	uitdoving.
Na 1 sec.	„	300	„	303	„ ;	„	3λ:	versterking.

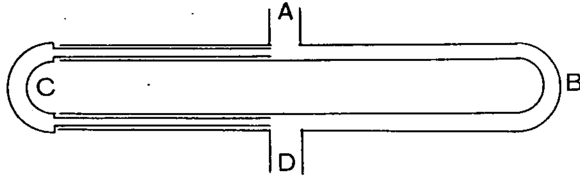
In 1 sec. dus 3 verzwakkingen en versterkingen, m.a.w. 3 zwevingen per sec.

Aantal zwevingen per sec. = verschil trillingsgetallen.

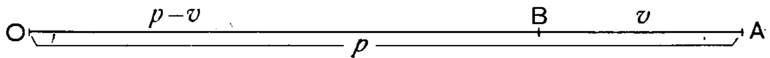
Proef van Quincke.

Voor A staat een geluidsbron. Buis C kan uitgeschoven worden.

Is de weg ABD = weg ACD, dan versterken de trillingen, die beide wegen volgen elkaar: Is 't wegverschil $\frac{1}{2}\lambda$, dan uitdoving, enz.



Principe van Doppler.



Nadert een trillingsbron (geluid of licht) A den waarnemer O, dan zullen per sec. meer trillingen O bereiken, dan wanneer A stilstaat. De toon van het geluid wordt dus hoger ('t licht verschuift naar het violet).

Stel de toon heeft n trillingen per sec.; afstand OA = p cm. Snelheid van A = v cm/sec.; snelheid geluid = V cm/sec.

In 1 sec. komt A in B, dus AB = v cm.

De eerste van n trillingen bereikt O in $\frac{p}{V}$ sec.

De laatste van n trillingen bereikt O in $\frac{p-v}{V}$ sec.

De trillingen vertrekken 1 sec. na elkaar, dus $\left(\frac{p-v}{V}+1\right)-\frac{p}{V}$ sec. is de tijd, die verloopt tussen het horen van de eerste en de laatste van die n trillingen. Men hoort dus n trillingen in

$$\frac{p-v}{V}+1-\frac{p}{V}=\left(1-\frac{v}{V}\right)\text{ sec.}$$

In 1 sec. hoort men dus

$$\frac{n}{1-\frac{v}{V}}\text{ trillingen}=\frac{V}{V-v}\times n\text{ trillingen}$$

Dus

$$\boxed{n'=\frac{V}{V-v}\times n}$$

Verwijdert de geluidsbron zich met snelheid v, dan wordt

$$n'=\frac{V}{V+v}\times n.$$

$n' < n$, dus de toon wordt lager.

Ik wil met dit voorbeeld natuurlijk niet beweren, dat het nu alleen maar zó moet. Integendeel, ik geef het gaarne voor beter. Wel kan het naar mijn mening duidelijk mijn bewering illustreren, dat de hoofdzaken gemakkelijk in weinige bladzijden samengevat kunnen worden. Het is ook volstrekt niet mijn bedoeling om naar aanleiding van dit artikel lange, onvruchtbare discussies uit te lokken. Ik heb slechts het boven betoogde rustig onder de aandacht van mijn collega's willen brengen. Misschien ook, dat het bovenstaande er toe kan meewerken om bij het samenstellen van leerboeken wat meer rekening te houden met hen, voor wie ze toch eigenlijk bestemd zijn, nl. onze leerlingen.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van A. W. SIJTHOFF, Leiden.

Prof. Dr. F. SCHUH en B. J. VAN TROTSENBURG, *Antwoorden (en aanwijzingen) van de vraagstukken voorkomende in het Leerboek der Mechanica,* 72 blz., 21 fig. . . . . *f* 1.—

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra II* **8e druk,** 204 blz., 50 fig. geb. . . . . *f* 2.25
Nieuwe Schoolalgebra III, **6e druk,** 199 blz., 69 fig., geb. *f* 2.25

P. WIJDENES en N. VAN DER PLOEG, *Algebra voor het Nijverheidsonderwijs,* **3e druk,** 90 blz., 9 fig. . . . . *f* 1.—

P. WIJDENES, *Beknopte Driehoeksmeting,* **8e druk,** Uitgave A, 50 blz. 25 fig. . . . . *f* 0.75

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES, *Stereometrie voor het M. en V.H.O.* **5e druk,** 145 blz., 161 fig. *f* 1.90, geb. . . . . *f* 2.25

Van de Vg. voor Kadaster en Landmeetkunde, Tijdschrift voor kadaster en Landmeetkunde, 53 Jg. afl. 6.

BOEKBESPREKING.

Inleiding tot de Nomographie door H. J. van Veen, Hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te Delft. Uitgave P. Noordhoff N.V. Groningen, Batavia 1937. fig. 124, w.o. XXII platen, blz. 240. Prijs gebonden *f* 5.90.-

De nomographie is de wetenschap, die, zoals de naam trouwens ook aanduidt, het verband, dat er tussen verschillende veranderlijke grootheden bestaat met behulp van een figuur vastlegt en wel op zodanige wijze, dat uit de tekening op de een of andere eenvoudige manier de waarde van de afhankelijke grootheid, behorende bij gegeven waarden der onafhankelijk veranderlijken, kan worden afgelezen.

De verschillende methoden, volgens welke zodanige tekeningen geconstrueerd kunnen worden als de vergelijking tussen de veranderlijken gegeven is, worden door den schrijver van het bovengenoemd werk op een heldere en duidelijke manier uiteengezet.

Na een inleidende bespreking van de beide hoofdsoorten van nomogrammen t.w. die met concurrente schaallijnen en die met collineaire schaalpunten, worden allereerst verschillende puntenschalen, de regelmatige, de logarithmische, de projectieve en de machts-schaal, alle op rechte lijnen gelegen, behandeld, terwijl verder nog als voorbeeld van een gebogen schaal de stereografische wordt besproken. Met een bespreking over de hulpmiddelen, die bij de constructie van deze schalen kunnen dienen, de logarithmische harp en de interpolator, alsmede met een voorbeeld van een dubbelschaal wordt het eerste hoofdstuk besloten.

De hoofdstukken II t/m IV handelen over nomogrammen met lijnenschalen; in de eerste plaats over die, welke behoren bij vergelijkingen met 2 veranderlijken, waarbij o.a. ook de anamorphose wordt besproken, door de toepassing waarvan de vorm en de onderlinge verhoudingen in het nomogram dikwijls vereenvoudigd resp. gewijzigd kunnen worden. Voor een betrekking tussen 3 veranderlijken wordt allereerst de voorwaarde nagegaan, waaraan een zodanige vergelijking moet voldoen, opdat minstens twee der stelsels beeldlijnen als rechte lijnen genomen kunnen worden.

Als voorbeeld van vergelijkingen, die, op geschikte wijze behandeld, door monogrammen met drie stelsels rechten als beeldlijnen kunnen worden voorgesteld, bespreekt Schr. achtereenvolgens

$$u\, e^{\frac{x^2}{y}} \sqrt{\pi y} = 1 \text{ en}$$

$$z = x^v$$

Vergelijkingen met vier veranderlijken worden behandeld in hoofdstuk IV. Voor een nomographische behandeling kunnen zodanige vergelijkingen dan in aanmerking komen, als ze door invoering van een

hulpveranderlijke te splitsen zijn in twee vergelijkingen, elk met drie veranderlijken, die gezamenlijk met de oorspronkelijk gegeven vergelijking gelijkwaardig zijn. Dit wordt toegelicht aan de hand van een voorbeeld en wel door het construeeren van een figuur voor de vergelijking

$$f_v = 100 \frac{\sigma_b}{\sigma_v} \sqrt{\frac{15 M}{2(\sigma_v + 10\sigma_b)}}.$$

Dat voor deze toelichting het tamelijk ingewikkelde geval, waartoe deze vergelijking aanleiding geeft, behandeld wordt, heeft m.i. wel enig bezwaar: De nomographisering van de twee vergelijkingen, die de gegeven formule vervangen, vraagt op zich zelve ongetwijfeld de volle aandacht van den nog niet ervaren lezer, waardoor de mogelijkheid wordt geopend, dat de kwestie van de invoering van de z-lijn, die betrekking heeft op de hulpveranderlijke, voor hem wat te veel naar de achtergrond wordt gedrongen, te meer waar bij de bespreking van de partiële vergelijkingen zaken aan de orde komen, o.a. de invoering van de grootheid λ, die in de voorafgaande bladzijden nog niet behandeld zijn.

Laat mij evenwel, in dit verband, dadelijk constateren, dat de uitwerking van de verschillende behandelde voorbeelden steeds zeer uitvoerig en duidelijk wordt toegelicht, en dat de Schr. elke stap, die gedaan moet worden om tot een goed nomogram te komen op heldere wijze motiveert en zo nodig aan de hand van hulp-figuren toelicht. Bovendien wordt steeds nadrukkelijk aangegeven voor welk bereik van de verschillende veranderlijken de figuur moet dienen en op welke wijze aan de daardoor bepaalde voorwaarden bij de constructie het best wordt voldaan.

Nomogrammen met puntenschalen worden behandeld in de hoofdstukken V t/m VII. Allereerst wordt de voorwaarde afgeleid, waaraan een vergelijking met drie onbekenden moet voldoen, wil men hem kunnen afbeelden door een nomogram met collineaire schaalpunten. Daarna worden een aantal van dusdanige vergelijkingen behandeld en wel eerst gevallen, waarbij de dragers, althans ten minste twee, rechte lijnen zijn. Bij de bestudering van hoofdstuk V zal, naar het mij wil toeschijnen, bij den lezer, die aan de hand van het boek van prof. van Veen voor het eerst kennis maakt met de nomografie, de vraag naar voren komen, waarvoor hier niet met de eenvoudigste gevallen, 3 rechte, evenwijdige dragers, wordt begonnen in plaats van de behandeling daarvan uit te stellen tot na de bespreking van de meer gecompliceerde voorbeelden, die daaraan in dit hoofdstuk voorafgaan.

De vervanging van twee op verschillende rechte dragers aangebrachte schalen door één dubbelschaal op een tweedegraadskromme volgt dan, en wordt aan de hand van een voorbeeld uitvoerig besproken.

Het hoofdstuk besluit met een zeer gedetailleerde toelichting en uitvoering van een nomogram met rechte dragers voor de vergelijking

$$th\ (a + bi) = M\epsilon_i^{\varphi}.$$

Hoofdstuk VI handelt over de nomographische orde van verschillende vergelijkingen en bespreekt een voorbeeld van een vergelijking

van de vierde orde, die aanleiding geeft tot een cirkel, als drager van de schalen van twee veranderlijken en tot een ellips, als drager van de derde schaal, terwijl natuurlijk de collineatie van drie bij elkaar behorende waarden blijft bestaan.

In het laatste hoofdstuk van de derde Afdeling bespreekt Schr. de methode om door middel van de invoering van een scharrierlijn een schaalmonogram voor een vergelijking met vier veranderlijken te construeren. Een voorbeeld met alle schalen, vier schalen en één hulpschaal, op vijf evenwijdige dragers wordt besproken. De tweede helft van dit hoofdstuk handelt over de methode van de dubbelgenummerde punten, waardoor het eveneens mogelijk is om onder bepaalde voorwaarden een vergelijking met vier onbekenden nomograpisch te behandelen. Ook hiervan wordt door een voorbeeld een duidelijke toelichting gegeven.

De laatste der vier afdelingen, waarin het werk is verdeeld, begint met de bespreking van de projectieve groep van het platte vlak. De transformaties, die zich bij deze groep voordoen, worden eerst toegepast op de verbetering van schalen en daarna op die van nomogrammen; daardoor wordt het mogelijk om aan een nomogram een meer gewenste vorm te geven dan die, welke bij een eerste vaststelling is gevonden. Treffend is het voorbeeld, behandeld op pag. 188 en v.v., waarbij door een geschikte transformatie een nomogram, dat door zijn eigenaardige vorm vrijwel onbruikbaar zoude zijn, overgaat in een zeer duidelijke en overzichtelijke figuur.

Verder behandelt deze Afdeling de lijn-coördinaten van *Unverzagt* als een inleiding tot de bespreking van het dualistische karakter, dat tussen verschillende nomogrammen bestaat, wanneer deze worden ontworpen enerzijds als nomogrammen met lijnen-schalen, anderzijds als nomogrammen met punten-schalen.

Met een viertal uitgewerkte voorbeelden van tamelijk ingewikkelde nomogrammen besluit Schr. zijn 240 bladzijden tellend werk.

Het is uit den aard der zaak niet doenlijk geweest om bij de bespreking van dit boek in bijzonderheden af te dalen. Ik hoop in het voorgaande in grote lijnen de inhoud te hebben weergegeven en daarbij den lezer van deze regels in staat te hebben gesteld zich althans enig idee te vormen van alles wat in dit boek geboden wordt.

Maar ter completering van dit overzicht moet nog worden vermeld, dat het boek ruim 150 opgaven bevat, die zich telkens bij de behandeling van een onderdeel aansluiten en die den lezer als nuttig oefenmateriaal zullen kunnen dienen. Bovendien zullen ettelijke tussen de tekst gestelde vragen hem dwingen om zich goed rekenschap te geven van de theorie, die hem hier geboden wordt.

Zoals Schr. in zijn voorrede opmerkt, is voor een goed begrijpen van de behandelde stof nodig de kennis van de allereerste beginselen van de Analytische Meetkunde en van de Leer van de Determinanten.

Met de lof, die Schr. toekent aan Ir. Giltay voor de constructie en de uitvoering van de figuren van zijn boek, zal ongetwijfeld ieder, die dit werk ter hand neemt, kunnen instemmen.

Ten slotte moge hier nog een vraag worden gesteld, die niet het

thans besproken werk, maar wel de nomographie in het algemeen betreft en wel deze: „welke toepassing vindt de nomographische wetenschap in de praktijk?" Ten einde althans enig antwoord op deze vraag, die bij de bestudering van het boek van prof. van Veen als het ware onwillekeurig bij mij oprees, te verkrijgen, wendde ik mij tot verschillende mij bekende personen en bureaux, (waterstaatswerken, machinefabrieken, betonwerken, verzekeringsbedrijven, de genie, electriciteitsbedrijven enz.) met het verzoek mij enige inlichtingen omtrent de bedoelde aangelegenheid te willen verstrekken. Daarbij ontving ik slechts in één enkel geval een positief antwoord, nl. dat, waarbij ik verwezen werd naar de Internationale Tabellen Zur Bestimmung von Kristallstrukturen (Berlin 1935) en daarvan Hoofdstuk XII Graphische Methoden Zur Auswertung von Röntgendiagrammen, waarin ettelijke nomogrammen voorkomen. Van de verschillende andere zijden werd opgemerkt, dat bij hen de nomographie niet werd toegepast, waarbij er door sommigen op werd gewezen, dat de fabrieken, die zich speciaal met serie-constructies bezig houden, zich daarbij misschien wel van de nomographie zouden bedienen. Gebruik makend van die opmerking heb ik mij gewend tot een ingenieur van een onzer grootste fabrieken, waar zodanig serie-werk zeker wel voorkomt, doch mocht ik tot op heden van dezen geen afdoend antwoord ontvangen.

De uitkomst van dit onderzoek, waarvan ik de oppervlakkigheid gaarne toegeef, deed bij mij de vraag rijzen, wat een meer systematisch onderzoek in dezen zoude leren.

Het is hier, naar ik meen, niet de plaats om verder op deze aangelegenheid in te gaan; het leek mij evenwel niet ongewenst om deze kwestie, nu de bespreking van het boek van prof. van Veen daartoe een gerede aanleiding gaf, met een enkel woord te berde te brengen.

Mocht de door mij opgedane ervaring in ruimere kring gelden, en mocht de oorzaak van het betrekkelijk weinig toepassen van de nomographische wetenschap liggen in de omstandigheid, dat de nomographie niet algemeen bekend is, dan zal stellig de bestudering van het hier besproken werk een afdoend middel blijken te zijn om aan deze onbekendheid een einde te maken.

P. G. T.

Radioontvangst in theorie en practijk door R. S w i e r s t r a (N.V. Drukkerij Jacob van Campen te Amsterdam, 1937).

Dl. I 7e druk 246 blz. 144 fig. *f* 2.50; geb. *f* 3.10.
Dl. II 7e druk 432 blz. 245 fig. *f* 4.50, geb. *f* 5.25.

De zevende druk van het bekende werk van den Heer Swierstra is tengevolge van belangrijke veranderingen en verbeteringen in de radiotechniek zozeer in omvang toegenomen, dat het werk thans definitief in twee delen verschijnt.

Deel I bevat de grondbeginselen en eerste ontwikkeling van de radiotechniek. Hierin is praktisch geen verandering aangebracht vergeleken met de vorige druk. Dit was ook te verwachten, want de stof van dit deel ligt eenmaal vast. De voortreffelijke wijze, waarop de schrijver alles uitlegt is nauwelijks of niet voor verbetering vatbaar,

de aardige analogieen van verschillende electrische verschijnselen met „watervoorbeelden" zijn verrassend en in hoge mate bevorderlijk voor de begripsvorming.

In tegenstelling met deel I heeft deel II een sterke uitbreiding ondergaan. Dit vindt voornamelijk zijn oorzaak in het verschijnen van de octode en van nog enkele andere uitvindingen, maar bovendien heeft de schrijver, omdat het aantal theoretisch onderlegde radiotechnici steeds toeneemt, gemeend, ten behoeve van dezen het werk te moeten uitbreiden, door wat dieper op sommige onderwerpen in te gaan. Daarbij is niet uit het oog verloren, wat Faraday reeds 80 jaar geleden aan Maxwell schreef: . . . .

> „Londen, 13 November 1857 . . . . Er is één ding, dat ik U gaarne zou willen vragen. Wanneer een mathematicus bij zijn wiskundige onderzoekingen over natuurkundige processen en hun resultaten zijn conclusies opstelt kunnen die dan niet even duidelijk en nauwkeurig in de gewone alledaagse taal worden uitgedrukt, als in wiskundige formules? Zo ja, zou het dan niet een groot voordeel zijn voor mensen zoals ik, om ze zo neer te schrijven? . . . ."

Maar ook voor de mathematisch geschoolde belangstellende is het een genoegen te lezen, hoe goed al deze zaken verteld kunnen worden, met een minimum aan wiskundige formules.

Beide delen bevatten een aanhangsel waarin een aantal foto's van lampenonderdelen, tabellen en karakteristieken. De uitgever zorgde voor een keurige uitvoering van het geheel. Een aanbeveling lijkt ons voor dit werk, dat zijn weg reeds lang gevonden heeft, welhaast overbodig.

F. Brouwer.

L o u i s L o c h e r, *Urphänomene der Geometrie.* Erster Teil. Zürich-Leipzig, Orell Füssli Verlag. 1937. 164 bladzijden, 173 figuren. Prijs fr 6, RM 3,60.

Dit aardige boekje vormt eene inleiding tot de *projectieve* meetkunde van het platte vlak en van de lineaire driedimensionale ruimte. Het is bedoeld voor belangstellenden in de wiskunde, die niet beschikken over uitgebreide kennis, eenige notie van elementaire meetkunde wordt echter wel verondersteld. De behandeling is daarom breed en aanschouwelijk. Vooral in het aanschouwelijk maken van tamelijk abstracte redeneeringen toont de schrijver zich een meester. Bijzonder fraai vind ik b. v. de manier, waarop hij den lezer inzicht weet te geven in de eenzijdigheid van het projectieve vlak.

De schrijver spreekt van „Urphänomene" in plaats van van axiomata, omdat dit laatste woord hem te veel de beteekenis van eene willekeurige aanname heeft, terwijl hij in de meetkunde de afspiegeling eener physische realiteit ziet.

De behandeling begint met het vertoonen van eenige eigenschappen aan de figuur van de stelling van Desargues, daarna worden de eenvoudigste figuren in de puntenruimte en de vlakkenruimte besproken, waarbij sterk de nadruk wordt gelegd op de (uit de aanschouwing afgeleide) dualiteit, vervolgens wordt de incidentie behandeld, en met behulp daarvan worden verschillende figuren opgebouwd. De invoe-

ring der oneindig verre elementen neemt natuurlijk heel wat plaats in beslag; de behandeling wordt besloten met eenige meer speciale onderwerpen, terwijl aan het einde wordt meegedeeld, dat de invoering van imaginaire elementen de overzichtelijkheid van het geheel sterk bevordert. (Misschien is aan deze imaginairen een tweede deel gewijd.)

Ik zou dit boekje gaarne aanbevelen, de vraag is echter, aan wie? Mij dunkt, dat het van nut kan zijn voor degenen, die hunne kennis der euclidische meetkunde met de projectieve willen aanvullen, voorts lijkt het mij aangename lectuur voor eerste-jaarsstudenten, en misschien ook voor enkele zeer begaafde leerlingen van de hoogste klassen der middelbare scholen. Het zou dan dus op zijne plaats zijn in schoolbibliotheken. Voor belangstellende leeken, — voor wie het mede bedoeld moet zijn, — lijkt het mij echter nog vrij zwaar. J. H. S.

Prof. Dr. B. L. van der Waerden, *De logische grondslagen der euklidische meetkunde.* Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1937. 87 bladz., prijs *f* 1,75 (geb. *f* 2,50).

Een beknopt, duidelijk en betrekkelijk gemakkelijk leesbaar boek over de grondslagen der meetkunde is een factor van gewicht voor de verspreiding van juiste inzichten in de elementaire meetkunde, en kan daardoor bijdragen tot verheffing van het peil der wiskundige kennis in een taalgebied, en daarom is het eene reden tot vreugde, dat wij thans een zoodanig werk in onze taal bezitten. Prof. Van der Waerden heeft zijne colleges over bovenstaand onderwerp in druk laten verschijnen, eerst in het tijdschrift „Christiaan Huygens" en daarna in den gemakkelijk bereikbaren vorm van een leerboekje van geringen omvang.

Het axiomastelsel, waarvan de schrijver uitgaat, verschilt eenigszins van de tot nu toe meest gebruikelijke, met name van dat van Hilbert; het voornaamste verschilpunt is wel hierin gelegen, dat niet de congruentie van lijnstukken of van hoeken als grondbegrip wordt aangenomen, maar dat als zoodanig het begrip verplaatsing wordt ingevoerd. De schrijver stelt zich blijkbaar als nevendoel, eene wetenschappelijke basis te schuiven onder de traditioneele verplaatsingsbewijzen der schoolmeetkunde.

Het werk is verdeeld in drie hoofdstukken. In het eerste worden de axiomata opgesomd en de eenvoudigste gevolgtrekkingen daaruit gemaakt, dus de meetkunde tot zekere hoogte opgebouwd, in het tweede worden modellen van euclidische en niet-euclidische meetkunden besproken, en daarmede de onafhankelijkheid van eenige der axiomata ten opzichte van de overige bewezen, terwijl het derde hoofdstuk gewijd is aan het meten van lijnstukken, hoeken en oppervlakken.

De axiomata, die in het eerste hoofdstuk worden besproken, worden in drie groepen verdeeld: de axiomata van verbinding, die van ordening en die van congruentie. Noch het parallelenaxioma, noch het continuiteitsaxioma wordt in eene afzonderlijke afdeeling ondergebracht. Ik geloof, dat hiertegen logisch niet veel is in te brengen, maar ik meen, dat het aan de overzichtelijkheid niet ten goede komt.

Parallelisme is het onbreken van elementen, die met twee of meer andere incident zijn, en is inderdaad een begrip, dat in het hoofdstuk incidentie thuis behoort, maar in het existentiebewijs van parallele lijnen spelen ordenings- en congruentieaxiomata een rol. Het zou mij niet verwonderen, als de behandeling van een aantal evenwijdigheidsstellingen vóór het existentiebewijs aanleiding gaf tot verkeerd begrijpen door minder geschoolde lezers. De beperking „zoo dit bestaat", een enkelen keer neergeschreven, behoorde eigenlijk veel vaker te zijn gebruikt.

Het komt mij voor, dat de schrijver veel succes gehad heeft met zijn streven, om door doelmatige keuze der axiomata de bewijzen zoo eenvoudig mogelijk te maken. Vooral in de paragraphen over ordening en over congruentie blijkt dit. Met bijzonder genoegen heb ik gelezen, dat de schrijver reeds als schooljongen geweigerd heeft het gebruikelijke bewijs voor de stelling omtrent het bestaan van gemeenschappelijke punten van rechte lijnen en cirkels te accepteeren; ik zelf heb dit bewijs ook nimmer zonder tegenzin aangehoord. Deze mededeeling moge aan het betoog des schrijvers kracht bijzetten: het zijn blijkbaar niet alleen de aanstaande hoogleeraren, die aan schijnbewijzen aanstoot nemen.

Hier volgen enkele punten, die mijns inziens minder gelukkig behandeld of geredigeerd zijn. Op bladzijde 3 wordt gezegd, dat het onverschillig is, of men spiegelingen al dan niet onder de verplaatsingen wil rekenen. Ik kan niet inzien, dat dit bij de behandeling der congruentie van drievlakshoeken van geen beteekenis is. Hierbij kan ik trouwens opmerken, dat de stereometrie wel heel stiefmoederlijk bedeeld is, omtrent haar opbouw wordt zeer weinig gezegd. De definitie van halve lijn op bladzijde 4 lijkt mij onjuist, maar de fout is gemakkelijk te herstellen. Men heeft axioma I 6, althans gedeeltelijk, ook noodig bij den opbouw der vlakke meetkunde. Uit didaktisch oogpunt beschouwd lijkt het mij beter, I 7 als axioma te nemen, dan een bewijs op grond der ordeningsaxiomata te geven. De schrijver zal wel weten hoe de practijk is: men „bewijst" I 7 op grond van niet uitgesproken axiomata. Zoodoende ontstaat een typisch schijnbewijs, en een klassegenoot van mij, de later als schaker zoo bekend geworden H. G. M. Weenink, accepteerde dit bewijs dan ook niet toen het ons op de H.B.S. werd voorgezet. Wat op bladzijde 14 omtrent de definitie van „hoek" gezegd wordt, is mij niet duidelijk; welke voordeelen de definitie als hoekbegrenzing heeft boven de definitie als hoekgebied, heb ik niet kunnen ontdekken, bovendien begrijp ik niet, dat de gegeven definitie niet op de axiomata berust, daar dit toch met het (gemakkelijk juist te definieeren) begrip „halve lijn" ten duidelijkste wel het geval is. Op bladzijde 24, in het bewijs van stelling 33, had m. i. niet mogen ontbreken, dat men tot hetzelfde resultaat komt met behulp van de verplaatsing, die B in B′ overvoert en A in een punt der halve lijn B′A′. Het had geen kwaad gekund, bij het bewijs van stelling 39 (bladz. 27), dat zoo veel gelijkt op de bewijzen onzer schoolboeken, er even de aandacht op te vestigen, welken rol de ordeningsaxiomata hier spelen, en waarom de stelling niet geldt in de niet-euclidische meetkunde van Riemann.

Het werk van Prof. Van der Waerden kan grooten invloed op ons schoolonderwijs hebben. Wij moeten den schrijver dankbaar zijn voor de moeite, die hij zich gegeven heeft om, waar hij meende critiek te moeten oefenen, dit te doen in zoo bij uitstek opbouwenden vorm. Een enkelen keer maak hij opmerkingen, die direct het schoolonderwijs raken, maar in de meeste gevallen laat hij het trekken van conclusies voor de onderwijspractijk aan de leeraren over. Mochten er onder dezen zijn, die zich geroepen voelen, de denkbeelden van Prof. Van der Waerden te transformeeren in een voor het schoolonderwijs direct bruikbaar leerboek der meetkunde (waarbij dan de stereometrie niet vergeten worde) — dan geef ik hun als mijne meening te kennen, dat hunne taak niet licht zal blijken te zijn. J. H. S.

Ir. J. F. Schuh, Leerboek der technische Theoretische Mechanica. 1ste deel: Algemene grondslagen der Theoretische Mechanica. P. Noordhoff N.V., Groningen—Batavia, 1937. Prijs *f* 7,25, geb. *f* 8,50.

Een aanwinst voor de Nederlandse vakliteratuur! Naar de schrijver mededeelt, en zoals wel uit de titel blijkt, is het boek in de eerste plaats bestemd voor studenten aan de Technische Hogeschool; dit eerste deel zal echter een uitgebreider kring van lezers welkom zijn.

Achtereenvolgens zijn hoofdstukken gewijd aan: Vectoren en vectorstelsels, Kinematica, Theorie der levende kracht, Algemene en bijzondere bewegingsvergelijkingen (dat het geen boek voor beginners is, blijkt wel duidelijk uit het feit dat in dit hoofdstuk pas de axioma's van Newton ter sprake komen, terwijl al eerder over „massa" gesproken is), Theorie der krachtvelden, De vergelijkingen van Lagrange voor holonome mechanismen (waarin aan het slot de canonische vergelijkingen), Oplossing van vraagstukken, Botsing, Voorbeelden.

Het boek ontleent zijn bijzondere waarde, ook voor anderen dan technische studenten, vooral aan het laatste hoofdstuk, en aan dat over de oplossing van vraagstukken. Uitvoerig worden verschillende bewegingsvraagstukken besproken: beweging met luchtweerstand, invloed der aardrotatie op de beweging van projectielen, belangrijke centrale bewegingen, bewegingen van lichamen met wrijving, gevallen van kleine slingeringen, iets over de turbine-theorie, en botsingsvraagvraagstukken. Op overzichtelijke wijze vergelijkt de schrijver de verschillende oplossingsmethoden. Toepassing der canonische vergelijkingen komt echter niet ter sprake. Aan het slot vindt men een mathematisch aanhangsel, en opgaven ontleend aan propaedeutische- en candidaats-examens in Delft.

Overal blijkt iemand aan het woord te zijn, die de moeilijkheden van het vak bij ondervinding kent, en weet welke fouten men moet leren vermijden. Hoe goed de schrijver de stof beheerst, blijkt o.a. uit de paragraaf over de vermeerdering der levende kracht van een holonoom mechanisme ten gevolge van gelijktijdig daarop werkende stoten. Hij weerlegt daarin de veel voorkomende opvatting, dat men bij de gelijktijdige werking van meerdere stoten de door elke stootkracht afzonderlijk verrichte arbeid zou kunnen aangeven.

De stijl is zeer duidelijk. Enkele uitdrukkingen (niet van den schrijver afkomstig) lijken mij minder gelukkig, zoals: moment van een vector *om* een as, traagheidsmomenten *om* de assen, momentvector a *in* het punt 0, terwijl op andere paatsen de woordjes *om* en *in* vervangen zijn door: *ten opzichte van,* hetgeen mij veel beter lijkt. Daarentegen zou ik liever niet spreken van de radiusvector van een punt *t.o.v.* de oorsprong, maar: *uit* de oorsprong. En klinkt de uitdrukking: „vector moment van de hoeveelheid beweging t.o.v. het punt O" niet beter dan: „vector moment hoeveelheid beweging in het punt O"?

Het is jammer, dat een alphabetisch register ontbreekt; wellicht is het de bedoeling dat in het 2de deel te geven. Met belangstelling zie ik de verschijning hiervan tegemoet; het zal de behandeling van de meer specifiek technische problemen bevatten.

A. J. Staring.

Bemerkungen anlässlich Dr. S. C. van Veens Kritik meines Buches „Die Brückenverbindungstheorie" in „Euclides" Jg. XIV 1937/38, Nr. 2 und 3, S.125—131.

In seiner Kritik S. 128 schreibt Dr. van Veen, dass meine Definition für die Aequivalenz der binären quadratischen Formen in Br. Art. 28 überflüssige Elemente enthält, indem er behauptet, dass der erste Teil dieser Definition eine Eigenschaft ist, die aus dem letzten Teil der Definition hergeleitet werden kann, und wahrscheinlich als Beweis hierfür weist er auf *Dirichlet:* Vorlesungen über Zahlentheorie, § 73 hin. Mithin behauptet Dr. van Veen ausserdem, dass man die Definition für die Aequivalenz zweier quadratischer Formen so formulieren kann: Zwei quadratische Formen gehören zur gleichen Klasse, wenn sie den gleichen Zahlenkomplex darstellen.

Hierzu muss ich bemerken:

I. Gemäss der „Brückenverindungstheorie" sind diese beiden Behauptungen falsch; denn die quadratischen Formen (a, b, c) und $(a, -b, c)$ stellen den gleichen Zahlenkomplex dar, während die diesen Formen entsprechenden Irrationalzahlen zu entgegengesetzten Klassen gehören, und solche Klassen Irrationalzahlen fallen im allgemeinen nicht zusammen.

II. Gemäss der „klassischen Theorie" kommt die erste von Dr. van Veens Behauptungen nicht in Betracht, während die letzte Behauptung falsch ist; denn (a, b, c) und $(a, -b, c)$ sind uneigentlich äquivalent $\left(\text{Substitution: } \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}\right)$, und nach *Dirichlet:* Vorlesungen über Zahlentheorie. 4. Auflage, § 59, sind die dann im allgemeinen nicht äquivalent.

III. Dr. van Veens Hinweisung auf *Dirichlet:* Vorl., § 73, ist ganz missweisend.

Abgesehen von Dr. van Veens Missverständnis hinsichtlich dieses Hauptpunktes der Theorie der quadratischen Formen und einem Paar Kleinigkeiten hinsichtlich Zahlenkreise, ist Dr. van Veens Kritik hauptsächlich dadurch charakterisiert, dass er mein Buch auf eine lästige Umschreibung der klassischen Theorie zu reduzieren sucht.

Sein Eifer hierfür erlaubt ihm nicht zu sehen, dass die Brückenverbindung zwischen quadratischen Irrationzahlen anderes ist als die gewöhnliche Kettenbruchentwicklung, und dass die auf dieser Brückenverbindung aufgebaute Theorie original ist, indem diese Theorie die quadratischen Formen von einem anderen Gesichtspunkt als die klassische Theorie untersucht.

Köbenhavn, den 14. Januar 1938. L. C. Due.

ANTWOORD OP DE VOORGAANDE BEMERKINGEN VAN Dr. DUE.

Over dit schrijven valt niet veel meer op te merken. Het zal den aandachtigen lezer niet ontgaan zijn, dat het hierbij ingenomen standpunt van Dr. Due niet heel veel afwijkt van het door mij geformuleerde op pag. 128 in mijn voorgaande bespreking, al is ook de strekking geheel anders. Ik handhaaf echter ten volle de algemene definitie van equivalentie zooals deze op pag. 128 is geformuleerd, in wezenlijke overeenstemming met die van Gauss (D. A. art. 158) en Dirichlet (D. D. § 56). Ik wees daarbij reeds herhaaldelijk op de noodzakelijkheid, onderscheid te maken tusschen *eigenlijke* en *oneigenlijke* equivalentie, en de bezwaren die kunnen voortvloeien uit het negeeren van dit onderscheid, waarvan het in opm. I gesignaleerde een direct gevolg is.

Wat opm. II betreft is de situatie in werkelijkheid als volgt.

Daar er naast iedere unimodulaire *eigenlijke* substitutie $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ ook een unimodulaire *oneigenlijke* substitutie $\begin{pmatrix}\alpha, & -\beta \\ \gamma, & -\delta\end{pmatrix}$ bestaat, kan Dirichlet zich, na dit verband duidelijk te hebben gemaakt, vanaf § 59 zonder eenig bezwaar beperken tot het geval van *eigenlijke* equivalentie, en daarom spreekt hij in deze paragraaf af, om verder onder equivalentie slechts *eigenlijke* equivalentie te verstaan. Gauss daarentegen blijft steeds nauwkeurig de gevallen van eigenlijke en oneigenlijke equivalentie onderscheiden.

Wat opm. III betreft, in § 73 bij D. D. Zahlentheorie wordt zeer nadrukkelijk het algemeene equivalentiebegrip gebruikt „weil dadurch der Nerv der Betrachtung deutlicher hervortritt".

Wat het laatste gedeelte van de laatste zin bij de opmerkingen van Dr. Due betreft, wil ik volstaan met de mededeling, dat ook ik die meening was toegedaan, toen ik alleen het voorbericht van het boek van Dr. Due had gelezen, maar dat ik die meening niet meer kon handhaven na de studie van het boek zelf.

Dordrecht, 3 Februari 1938. S. C. van Veen.

Dubbeldamsche weg 214.

[Discussie gesloten. Red.]

MODERNE SCHEIKUNDE[1]).

Reeds in 1905 heeft Prof. Ernst Cohen[2]) in een lezing over het onderwijs in de chemie aan de Hogere Burgerscholen gewezen op de wenselijkheid voor dit vak een behandelingswijze te volgen, die de samenhang der feiten vanuit een zo algemeen mogelijk standpunt doet bezien en die daardoor van het geheugen der leerlingen niet meer vordert dan het hoog-nodige.

Dit principe lijkt mij nog altijd de enig juiste grondslag, waarop de lessen in de scheikunde gebaseerd mogen zijn. Het biedt de meeste kansen ter bereiking van het eigenlijke doel van alle onderwijs: het verruimen van de denkmogelijkheden van de leerling en de training van zijn denkvaardigheid. Misschien zal men mij tegenwerpen, dat ook geheugenoefening een zeer belangrijke en noodzakelijke factor bij het schoolonderricht moet zijn en ik zal de laatste zijn om dit te ontkennen, maar deze geheugenoefening wordt door andere vakken, waarvoor het in een elementair stadium noodzakelijker is, voldoende gegeven. Deze geheugenoefening in het centrum te stellen van een didactisch systeem voor de scheikunde, lijkt mij een miskenning van de mogelijkheden, die het onderwijs hierin biedt, en voor ons vak bovendien in strijd met de uitdrukkelijke toelichting op de wet van 1863, regelend het M.O., waarin gezegd wordt, dat het hoofdkarakter behoort te zijn een algemene voorbereiding tot een grote verscheidenheid van maatschappelijke betrekking, beroep of dienst en geen professionele instructie[3]).

Indien men dan in overweging neemt, dat de moderne ontwikkeling der chemie het overzien van de grote verscheidenheid der verschijnselen uit een zoveel algemener standpunt mogelijk maakt, is het dus ontoelaatbaar, dat men voortgaat onze eindexamencandidaten te belasten met een zo bezwarende hoeveelheid feitenmateriaal, die de zeer grote categorie van onze leerlingen, die met voortgezet scheikundeonderwijs niet in contact komen, toch met een verbluffende snelheid totaal vergeten. Wie wel eens de moed gehad heeft zijn oud-leerlingen op dit punt te testen moet in dit opzicht tot weinig bemoedigende conclusies zijn gekomen. Er hapert dus blijkbaar iets.

Dat „iets" is het vooral-zakelijke-kennis-vorderende programma van de minimumeisen voor het eindexamen[4]) waarmee wij scheikundeleraren nu eenmaal rekening hebben te houden. De ontelbare malen, dat wij onze leerlingen met een „hoe" moeten plagen, zonder hen met een, zij het aan nog zo elementaire verwachtingen voldoend „waarom" te kunnen opbeuren, leiden vanzelf tot een vermindering van hun interesse, die des te betreurenswaardiger is, nu de stand van onze wetenschap toelaat een phaenomenologische chemie om te zetten

---

[1]) Naar aanleiding van Van Arkel en Snijder; Leerboek der Scheikunde, gegrond op atoommodel en periodiek systeem, P. Noordhoff N.V., Groningen-Batavia (1937).

[2]) E. Cohen, Chem. Weekblad *2,* 805 e.v. (1905).

[3]) Thorbecke in de memorie van toelichting.

[4]) Chem. Weekblad *32* (1935) pg. 75 e. v.

in een chemie, waarvan de verschijnselen zijn terug te brengen tot fundamentele principes en te verklaren door een meer samenvattende en meer in het wezen dier verschijnselen doordringende theorie.

Deze opmerkingen moesten vooraf gaan aan de bespreking van het onlangs verschenen leerboek der scheikunde, gegrond op atoommodel en periodiek systeem door Prof. Dr. A. E. van Arkel en Dr. H. G. S. Snijder. Het schrijven van genoemd leerboek toch is niet minder dan een uitgesproken revolutionaire daad, die ons met schrik heeft doen ontwaken uit de plezierige rust, waarin wij ons zo heerlijk koesterden te midden van het aangenaam tik-tak der regelmatig verschijnende schoolboeken.

Ja, het valt niet te ontkennen, wij waren aardig op weg in te dommelen bij onze goed gefundeerde en beproefde methodes en methodetjes, die door de verbijsterend snelle verdieping van de inzichten in ons vak, toch een verdacht ouderwets karakter begonnen te krijgen.

Nu zijn daar in eens een paar ordeverstoorders gekomen om ons te zeggen, dat het ook anders en zelfs beter kan en ogenblikkelijk is de wacht in het geweer (reactionairen vertonen vaak een ongewone activiteit, indien zij zich verzetten tegen nieuwe denkbeelden) en hetzelfde spelletje herhaalt zich, dat men op elk gebied van geestelijke interessen in bepaalde perioden met hetzelfde enthousiasme ziet spelen en dat steeds eindigt met de uiteindelijke overwinning der nieuwere denkbeelden en inzichten.

Reeds het voorwoord van dit leerboek is een oorlogsverklaring. Na betoogt te hebben, dat het scheikunde-onderwijs zo nauw mogelijk moet aansluiten aan het nieuwste wetenschappelijk inzicht, vervolgen de schrijvers: „Het is een gelukkige omstandigheid, dat deze aansluiting van het elementaire onderwijs zoveel gemakkelijker is, dan bijv. twintig jaar geleden, toen de scheikunde veel meer dan nu bestond uit een groot, betrekkelijk weinig samenhangend feitenmateriaal. Want al was op dat moment door het periodiek systeem en de ionentheorie reeds een betere rangschikking der feiten mogelijk, tot een algemene grote lijn was men niet gekomen. In plaats van één scheikunde waren er nog steeds evenveel scheikundes als er elementen waren."

De vraag, die ons nu bij de beoordeling van dit boek in de eerste plaats moet bezighouden is deze: In hoeverre zijn de schrijvers er in geslaagd aan te tonen, dat, door bij de behandeling der scheikunde van een meer centraal punt uit te gaan, het mogelijk is een meer modern inzicht te geven en in hoeverre vertegenwoordigt dan dit modernere inzicht een meer blijvende waarde voor onze leerlingen in hun verder leven.

Ik neem aan, dat ik de beantwoording van het eerste gedeelte der vraag buiten beschouwing kan laten. Een enkele blik in de inhoudsopgave, ja zelfs op de omslag, overtuigt ons er van. Het tweede gedeelte der kwestie is minder eenvoudig te beantwoorden. Bij het eerste doorbladeren wordt men inderdaad afgeschrokken door de geheel nieuwe behandelingswijze van de stof en de omvangrijke vermeerdering van theoretische beschouwingen, maar bij nauwkeurige

ontleding valt de inhoud erg mee. Zij stelt zeker geen onmogelijke eisen aan een gemiddeld H.B.S.-leerling en zal zonder twijfel zijn interesse meer prikkelen dan de dorre opsomming van zakelijke kennis, zonder enig oorzakelijk verband, waartoe ons het programma der minimumeisen helaas al te dikwijls dwingt.

Ik heb er reeds op gewezen, hoe het met onze leerlingen gesteld is, wat betreft het onthouden van al die zonder verband geleerde kleuren, neerslagen, reactievergelijkingen, enz. Mag men nu in dat opzicht niet meer succes verwachten van een methode, die aan een tot het principieel noodzakelijke beperkte feitenkennis een logische grondslag geeft. Zouden onze leerlingen niet met meer genoegen op hun scheikunde-onderwijs terugzien, indien daardoor hun inzicht in de bouw der materie meer was verdiept en hun de mogelijkheid gegeven was niet alleen wetenschappelijke berichten, waarmee hun de couranten in aanraking brengen, te volgen, maar tevens hun kosmisch inzicht in overeenstemming te brengen met de moderne natuurwetenschappelijke denkbeelden?

Tot zover de algemene aard en strekking van dit leerboek. Wat inhoud en indeling aangaat kan ik kort zijn. De eerste 27 §§ behandelen de gewone elementaire begrippen en wetten en geven de leerling tevens gelegenheid kennis te maken met de eigenschappen van zuurstof, water en waterstofperoxyd, terwijl tevens een voorlopig overzicht gegeven wordt over de voornaamste eigenschappen van halogenen, zwavel, stikstof en phosphor. Een door scherper onderverdeling overzichtelijker en systematischer behandeling in dit elementaire stadium zou het leerboek ten goede zijn gekomen. Ook komt naar mijn persoonlijke smaak de pas hierop volgende bespreking van de valentie rijkelijk laat [5]). Vooral waar het toch een voorlopige behandeling betreft kan men m.i. het hoofdstuk valentie als werkmiddel voor het maken van formules en vergelijkingen veel eerder invoeren evenals trouwens de regels van de zoutvorming, die nu pas in § 54 behandeld worden. Dit alles te samen zou dan geschikt materiaal kunnen vormen voor de 3de klasse.

In de 4de klasse zou men daarna de theoretische onderwerpen kunnen bespreken, die verdeeld zijn over de §§ 29 tot en met het einde van het eerste deel. Behalve de gewone onderwerpen als chemisch evenwicht, ionentheorie en warmteverschijnselen zijn hier ook die onderwerpen verenigd, waarvan de kennis in het programma der minimumeisen (soms zelfs uitdrukkelijk) [6]) niet vereist wordt en waarvan ik de invoering revolutionair genoemd heb. Ik kan er echter aan toevoegen, dat ik persoonlijk hiervan de §§ over de bouw der atomen, de daarmee samenhangende molecuul- en kristalbouw en zelfs iets over de complexvorming reeds gedurende tien jaar tot mijn volkomen bevrediging in mijn onderwijs betrokken heb. De §§ over vluchtigheid, geleidingsvermogen, stabiliteit, enz. heb ik echter door gebrek aan tijd steeds achterwege moeten laten.

---

[5]) Ik signaleer in 't voorbijgaan een hinderlijke fout op blz. 85, waar zwavel in zwavelzuur tweewaardig wordt genoemd. Bedoeld is in zwavelijzer.

[6]) B.v. geen verklaring der valentie.

En hiermee komen we nu aan het grote bewaar, dat de invoering van dit leerboek aanzienlijk zal belemmeren. Het is mij n.l. niet duidelijk hoe de schrijvers na de zeer belangrijke en principieël zeer toe te juichen verdieping van het inzicht nog tijd menen te kunnen vinden om aan te sluiten aan de eisen van het eindexamenprogramma. Wel hebben zij in het tweede deel getracht hieraan te voldoen, maar de geheel afwijkende opzet van de behandelde stof vereiste toch een zeer aanzienlijke besnoeiing, zodat het behandelde zich beperkt tot het strikt noodzakelijke, waardoor speciaal de bespreking van technische procédé's in het gedrang gekomen is. Hoewel ik persoonlijk een beslist tegenstander ben van het geven van veel technische details, lijkt het mij toch niet ongewenst aan enkele technische processen (ik denk bijv. aan loodenkamerproces, proces v. Solvay, Haber, enz. [7]) een uitvoeriger bespreking te wijden. Natuurlijk zal veel hier afhangen van de persoonlijke smaak van den leraar.

Ik heb bij de bespreking van dit leerboek een plaatsruimte gevraagd groter dan gewoonlijk voor de aankondiging van schoolboeken gebruikelijk is. De belangrijkheid van dit werk en de daarmee in verband staande didactische problemen leken mij dit te wettigen. Persoonlijk heb ik niettegenstaande de opgesomde bezwaren de grootste bewondering voor de moed van de schrijvers, die op zo'n radicale wijze enkele heilige tradities hebben aangetast. Zij zullen zichzelf wel niet voorgespiegeld hebben, dat hun boek „a good seller" zal worden, zolang wij aan het thans geldende programma gebonden blijven. Waar zij echter meedelen, dat de voornaamste reden, waarom zij tot het schrijven van dit leerboek overgegaan zijn, is, aan te tonen, dat de mogelijkheid bestaat het onderwijs in de scheikunde op een modernere, meer algemene basis in te richten, meen ik te kunnen eindigen met te constateren, dat zij hiermee in hun opzet volkomen geslaagd zijn. Vooral omdat dit nieuwe systeem inderdaad door een mindere belasting van het geheugen aan het begrip ten goede komt, kan ik hun revolutionaire daad van harte toejuichen.

Moge de commissie, die zich bezighoudt met de samenstelling der minimumeisen met de perspectieven, die dit werk opent terdege rekening houden. Het kan het onderwijs in ons vak niet anders dan ten goede komen.

Dr. Th. de Crauw,
leraar IVde H.B.S. 5-j. c. te Amsterdam.

---

[7]) Vooral die processen, die ionentheorie en evenwichtsleer kunnen toelichten.

ARISCHE WISKUNDE

DOOR

U. H. VAN WIJK.

Een dezer dagen kwamen mij de eerste twee nummers van den eersten jaargang (1936) van het tijdschrift „Deutsche Mathematik" in handen. Onder het hoofd „Studenten, in Front!" zet Fritz Kubach, die den indrukwekkenden titel voert van „Reichsfachabteilingsleiter Mathematik der Deutschen Studentenschaft", het doel van het nieuwe periodiek uiteen. Men erkent algemeen, zegt Kubach, dat de zege der nationaalsocialistische wereldbeschouwing een grondige hervorming van de wetenschapsbeoefening in Duitschland tot gevolg heeft gehad. Alleen voor de wiskunde en de exacte natuurwetenschappen wil men nog wel een uitzondering maken: „Die Mathematik als der Prototyp der reinen, voraussetzungslosen und internationalen Wissenschaft lasse sich nicht in die engen „Fesseln" der Abhängigkeit von dem geschichtlichen Ort ihrer Entstehung, dem Charakter, der Weltanschauung und der Rasse ihres Schöpfers zwingen."

Tegen deze gevaarlijke, liberale opvatting kant zich de schrijver. De nationaalsocialistische wereldbeschouwing heeft z.i. „Anspruch auf die totale Erfassung unseres gesamten Schaffens und Wirkens, ausnahmslos auf allen Gebieten."

Nu is het natuurlijk niet eenvoudig om dit standpunt met een beroep op het historische feitenmateriaal plausibel te maken en het kan dan ook geen verwondering baren, dat, zooals Kubach verzucht, de meeste docenten in de mathesis dat nog niet willen slikken. Hij schrijft dit toe aan den ongeëvenaard grooten invloed, dien de Joden in mathematische kringen in het vroegere Duitschland hebben gehad. Die invloed werkt nog na en moet door de actie der georganiseerde studenten in samenwerking met de docenten, die met hen sympathiseeren, zoo spoedig mogelijk „beseitigt" worden.

In de toekomst moet volgens Kubach c.s. slechts de toegepaste

wiskunde beoefend worden. „Es ist nämlich die typisch jüdisch-liberalistische These, Kriterium des Daseinsrechtes einer mathematischen Theorie sei ihre „ästhetische Schönheit", womit ein logisch geschlossener — bestenfalls noch einfacher — Aufbau auf Definitionen gemeint wird.

„Kriterium des Daseinsrechtes einer mathematischen Theorie kann für uns aber allein ihre Anwendbarkeit sein, und zwar Anwendbarkeit in einer ganz klaren Bedeutung."

De „reine Mathematik" is een „Dokument jüdisch-liberalistischer Illusionstechnik, entsprungen dem Intellekt von Artisten, die mit Definitionen jonglieren", decreteert de Göttinger hoogleeraar E. Tornier. A propos, hebben de heeren het „Journal für die reine und angewandte Mathematik" al herdoopt?

Terecht komt Prof. E. A. Weiss uit Bonn hiertegen op. In een verslag over een congres van mathematici en physici, in 1935 te Stuttgart gehouden, merkt hij op:

„Auch trat wieder die Tendenz einiger Mathematiker hervor, sich — unter völliger Miszverkennung nationalsozialistischer Wissenschaftsauffassung — durch ein etwas krampfhaft anmutende Umstellung auf angewandte Probleme (es wurde sogar vorgeschlagen Themen für mathematische Dissertationen vom Reichswehrministerium anzufordern) in den Rahmen des dritten Reiches besser anpassen zu wollen."

Weiss licht dit nog nader toe door op te merken, dat op het congres de ervaring werd meegedeeld, dat scholieren er niet bepaald op gesteld zijn, dat hun toegepaste problemen voorgezet worden. Wel stellen zij er prijs op, dat de onderwerpen aanschouwelijk en niet te abstract behandeld worden. Volgens Weiss is dit een redelijk verlangen. Men zal den student in dien zin moeten opleiden. Hieraan hapert gewoonlijk nogal wat, niet zoo zeer door het ontbreken van de toegepaste mathesis als leervak als wel door het terugdringen van de meetkunde aan de universiteiten naar het tweede plan, zegt de geometer Weiss.

Wij krijgen echter uit andere bijdragen in het periodiek den indruk, dat deze opvatting van Weiss door de meeste nationaal-socialistische mathematici niet gedeeld wordt.

Het historische onderzoek betreffende „rassegebundenes mathematisches Schaffen" heeft tot „verrassende" resultaten geleid.. In

een „Arbeitsgemeinschaft der Fachschaft Naturwissenschaftler der Heidelberger Studentenschaft", bestaande uit 15 mathematische en physische studenten, werden de werken van Johann Kepler en Isaäc Newton bestudeerd. Uit het werk van deze „Germaansche" onderzoekers bleek, dat natuurwetenschappelijk denken en religieus voelen „letzten Endes aus derselben Wurzel, aus derselben Substanz entspringen." (Accoord, v. W.).

Als leerrijk tegenvoorbeeld deed Einstein en zijn systeem dienst. Diens onaanschouwelijk mathematisch formalisme is volgens deze knapen geen consekwente voortzetting van de onderzoekingen van Kepler en Newton, maar een vernietiging van datgene, wat aan hun werken ten gronde ligt, het Arische „Naturgefühl":

„In der Einsteinschen Theorie handelt es sich um eine seelische Haltung und nicht um Behauptungen, welche experimentell oder durch astronomische Beobachtung prüfbar waren. (Sic! v.W.) Am deutlichsten kommt dies zum Ausdruck in der Ausmerzung des der nordisch-germanischen Mechanik eigenen Begriffes der „Kraft".

Zeven studenten van de Berlijnsche universiteit kwamen tot hetzelfde resultaat. Lorentz kon echter wel genade bij deze „onderzoekers" vinden. „Wenn Lorentz die Verhältnisse der relativen Bewegungen aus experimentellen Ergebnissen folgert, so konnten wir zeigen, dasz Einstein seine Gedanken nur durch unnachprüfbare Voraussetzungen klarzumachen versucht." Voor de mathesis namen zij naast de werken van Kowalewski en Bieberbach, die een zuiver Arisch karakter bleken te bezitten, een recent boek van Landau in beschouwing, waarin het best de Joodsche geest in de wiskunde tot uiting bleek te komen:

„Es ist ganz klar, dasz ein Lehrer, der in dieser jüdischen abstrakten Art ausgebildet ist, die Gebiete der Mathematik der Jugend anders vortragen wird als einer, die an der uns arteigenen, strengen und klaren Weise geschult ist."

Het spreekt vanzelf, dat het eerste deel van Lenards „Deutsche Physik" met groote ingenomenheid in dit tijdschrift is besproken. Ook Lenard is er nl. van doordrongen, dat alle wetenschap „rassegebunden und blutmäszig bedingt ist". Hij schrijft bv.:

„Dem Juden scheint wunderlicherweise Wahrheit, Wirklichkeit überhaupt nichts Besonderes, von Unwahrem Verschiedenes zu sein, sondern gleich irgendeiner der vielen verschiedenen, jeweils

vorhandenen Denkmöglichkeiten. In der jüdischen Physik wird schon jede Vermutung, die nachher nicht ganz verfehlt sich zeigt, als Markstein gewertet. Die arische Art der Tätigkeit wird aber mit solcher Wertung stillgelegt, und es ist in dieser Hinsicht schon eine sehr merkliche Auswirkung erfolgt. Der Fremdgeist wirkt lähmend; alles Rassefremde ist dem Deutschen Volke schädlich."

Wanneer de Nobelprijswinnaar Lenard deze karakteristiek van de Joodsche physici geeft, kan het ons niet verwonderen, dat minister Goebbels onlangs bekend maakte, dat sinds 1933 zonder schade 3000 Joden uit het intellectueele leven in Duitschland zijn geëlimineerd. Dat „zonder schade" lijkt ons echter veel te bescheiden. Het zal ten rechte moeten zijn „met groot voordeel".

DECIMALE HOEK- EN BOOGMAAT

DOOR

F. HARKINK, c.l., landmeter van het Kadaster te Rotterdam.

Twee recente feiten hebben de aandacht van een groter publiek dan de rechtstreeks betrokkenen gevestigd op de decimale hoek- en boogmaat.

Het *eerste feit* is, dat enkele dagbladen onlangs, met grote koppen, het bericht lanceerden, dat de Duitse Regering een nieuwe verdeling van de rechte hoek voorgeschreven had. Den leek gaf dit bericht de indruk, dat hier met forse hand een in de wetenschap ingrijpende, zij het dan ook doeltreffende maatregel was getroffen. Een Nederlands geleerde, die de astronomie beoefent, heeft zich laten verleiden, alleen afgaande op het krantenbericht, in een dier dagbladen blijk te geven van zijn ontsteltenis over deze maatregel: in de astronomie zou de nieuwe verdeling op bezwaren stuiten (men zou volgens den schrijver wel 10 jaar nodig hebben om bestaande tabellen om te rekenen; ik kan dit niet zo erg vinden, als daarmede voor eeuwen lang tijdsbesparing en andere voordelen verkregen worden); bovendien is in de astronomie de oude verdeling internationaal vastgesteld en Duitsland had daar niet op eigen houtje inbreuk op mogen maken. De schrijver zou met dit laatste stellig gelijk gehad hebben, indien het krantenbericht juist was geweest.

Een afdruk van de originele Duitse beschikking heb ik thans voor mij liggen. De belangrijkste regels laat ik hier vertaald volgen:

> Aanschrijving van 18 October 1937 van den Minister van Binnenlandsche Zaken.
>
> De reorganisatie van het landmeten in zijn gehele omvang vereist, dat eenheid gebracht wordt in de methoden en in de instrumenten. Daaruit volgt, dat het voortaan niet meer aan

de meetdienst overgelaten mag worden, tussen de twee verschillende hoekmaateenheden en cirkelverdelingen naar welgevallen te kiezen. Voor algemene invoering is de nieuwe verdeling het meest geschikt, omdat met deze de hoekmetingen zich eenvoudiger en gemakkelijker laten uitvoeren en verder verwerken dan met de oude verdeling.

Ik bepaal daarom:

I. 1. De in de landmeetkunde te gebruiken eenheid van hoekmaat is de graad (nieuwe verdeling).

2. De graad is het honderdste gedeelte van de rechte hoek.

3. De graad wordt volgens het decimale systeem in tienden, honderdsten, duizendsten enz. onderverdeeld. Enz.

II. 1. Alle hoeken en richtingen moeten in officiële landmeetkundige bescheiden in eenheden volgens de nieuwe verdeling aangeduid worden.

2. Bij het primaire Rijksdriehoeksnet kan, voor zover de verbinding met astronomische bepalingen dit vereist, de oude verdeling behouden worden.

3. Het gebruik van de oude verdeling voor geografische coördinaten en netlijnen blijft onaangetast.

III. 1. De van oude verdeling voorziene hoekmeetinstrumenten van de officiële meetdienst moeten geleidelijk in instrumenten met nieuwe verdeling veranderd worden. In het bijzonder moeten de randverdelingen in het oude stelsel van de theodolieten, die bestemd zijn voor de opmeting van driehoeksnetten, vóór 1 April 1945 veranderd zijn. Na deze datum behoren in het algemeen nog slechts instrumenten met nieuwe verdeling in gebruik te zijn.

2. Voor zover in de overgangstijd de oude verdeling nog gebruikt wordt, moeten de resultaten van de metingen, die voor volgend werk van betekenis zijn, in het bijzonder de verzamelstaten van de trigonometrische puntsbepalingen, in de nieuwe verdeling omgerekend worden.

3. Tafels voor de nieuwe verdeling zijn in de volgende bijlage vermeld. Enz.

Nu ik de zaak aldus tot zijn normale proporties teruggebracht heb, zal iedere deskundige het met mij eens zijn, dat die zeer weinig om het lijf heeft. Een gelijke maatregel zou, zonder enig bezwaar, voor de Nederlandse landmeetkunde genomen kunnen

worden. Het behoeft onzen Minister van Financiën slechts een eenvoudige dienstaanschrijving voor het Kadaster (dat een groot deel van het Nederlandse landmeten beheerst) te kosten . . . . . en *er verandert vrijwel niets, omdat de „nieuwe" verdeling al sinds lang gebruikt wordt.* Weliswaar zijn er nog enige oude hoekmeetinstrumenten in gebruik, die voorzien zijn van de oude (of sexagesimale) verdeling, maar de daarmee verkregen hoeken worden dikwijls eerst even omgerekend in de nieuwe, decimale, verdeling, alvorens er verder mee te werken. In vele tafels (ook in de hieronder vermelde) zijn hulptafeltjes opgenomen, waarmee dat omrekenen een zeer eenvoudig werk is en voor de rekenmachine (bijna elk Kadasterkantoor beschikt tegenwoordig over een of meer moderne rekenmachines) heeft men een speciale methode bedacht, met behulp waarvan in enkele seconden een hoek in oude verdeling is herleid tot dezelfde hoek in nieuwe verdeling of omgekeerd.

Waarom geeft men in de praktijk de voorkeur aan de decimale verdeling? Om dezelfde reden, als waarom men in het gewone rekenen liever met het tientallig stelsel werkt dan bv. met het zeventallig. Om dezelfde reden, als het rekenen in decimaal verdeelde munten zoveel eenvoudiger is dan met ponden, shillings en pence; om van de Engelse maten en gewichten niet te spreken! Van onderstaande aftrekkingen zal iedereen toch de tweede gemakkelijker vinden dan de eerste, waarbij men moet rekenen in het

225°34′17″	250,6349 gr	£ 74. 6.1	*f* 74,61
197°49′38″	219,8080	„ 59. 8.5	„ 59,85
27°44′39″	30,8269 gr	£ 14.17.8	*f* 14,76

tientallig en in het zestigtallig stelsel; en de vierde eenvoudiger dan de derde. Toch betreffen de eerste twee aftrekkingen precies dezelfde hoeken, bij de eerste in het oude en bij de tweede in het nieuwe stelsel. Men ziet, dat in dit laatste, de graden als gewone tiendelige breuken geschreven worden. Men spreekt dan ook van *decigraden, centigraden, milligraden* en *decimilligraden.* Een milligraad is ongeveer 3″.

De kans op fouten is bij de tweede aftrekking veel minder dan bij de eerste. Dit is van overwegend belang: een in de praktijk gemaakte fout heeft heel wat ernstiger gevolgen dan een op school

begane. Een maatregel, die de kans op fouten geringer maakt, *moet* genomen worden.

Een tweede voordeel is, dat de randverdelingen van de hoekmeet-instrumenten (theodolieten) meer overeenkomst kunnen hebben met een gewoon maatlatje; dus gemakkelijker aflezen en weer minder kans op fouten, welke in dit geval moeilijk of in het geheel niet te achterhalen zijn, omdat we nog niet zo ver zijn, dat de kijkerstanden in de microscopen van onze theodolieten (dus de aflezingen op de randverdelingen) gefotografeerd worden.

Als derde voordeel noem ik nog, dat één centigraad op een grote cirkel van de aarde overeenkomt met een booglengte van 1 km en als vierde, dat bij het opzoeken in tafels de hoeken gemakkelijker tot het eerste kwadrant herleid kunnen worden (de sinus van 312 gr zoekt men op als —cos 12 gr.; daarentegen sin 312° = —cos 42°!).

Als ik nu beweer, dat het nieuwe van die „nieuwe" verdeling er al sinds meer dan een eeuw af is en overal ter wereld (dus ook in Duitsland) de decimale verdeling in de toegepaste trigonometrie sinds lang ingang heeft gevonden, kan ik dit het best staven met de volgende beknopte gegevens. [1])

De decimale verdeling van de rechte hoek is in Frankrijk tegelijk met het metrieke stelsel tijdens de Revolutie ingevoerd. In 1795 verscheen te Parijs de eerste logarithmentafel volgens de nieuwe verdeling, nl. die van *Callet;* in 1799 te Berlijn die van *Hobert und Ideler* en in 1801 te Parijs die van *Borda.*

Sindsdien zijn in het buitenland talrijke tafels in de nieuwe verdeling uitgegeven. In een Frans leerboek over landmeetkunde van recente datum lees ik, dat de centesimale verdeling thans algemeen gebruikt wordt door topografen, [2]) geodeten en landmeters en de sexagesimale verdeling nog alleen door astronomen en zeelieden

---

[1]) Zie P. Wijdenes *Decimale tafels* in „Euclides" Jg. XIII, 1936/37.

[2]) Vandaar, dat men op de autokaarten van Michelin de decimale graden aantreft; de breedtecirkels geven dus afstanden van 100 km aan; op de kaarten van België heeft men 57 gr; 56,80 gr; 56,60 gr enz., onderlinge afstanden dus van 20 km. Men leest met één oogopslag vrij goed alle afstanden; probeer het eens op onze A.N.W.B. kaarten; b.v. Arnhem—Maastricht, Groningen—Apeldoorn, Den Helder—Rotterdam. Op het land en in de lucht wordt gerekend met kilometers, maar de kaarten geven graden van 60 Engelse mijlen! Een schaal op onze kaarten geeft niets en een lijnstukje voor 10 tot 50 km ergens in een hoekje van de kaart al niet veel meer. W.

en wel omdat zij voor de eersten een eenvoudige betrekking geeft tussen geografische lengte en tijd (15° lengteverschil = 1 uur; 15′ = 1 tijdseconde) en omdat de laatsten hun lengten rekenen in zeemijlen (1852 m), die ongeveer overeenkomen met 1′ van de grote cirkel.

Zonder enig bezwaar kunnen beide stelsels naast elkaar blijven bestaan; voor de alledaagse praktijk geniete het decimale de voorkeur. Ik acht het zeer wenselijk, dat de scholen (zoals de Franse) in hoofdzaak werken met de nieuwe verdeling, maar toch ook niet verwaarlozen, de leerlingen bekend te maken met de oude. Tot nu toe is dit in Nederland niet het geval, wat geweten zal moeten worden 1e aan onbekendheid met de werkwijze van hen, die allereerst geroepen zijn, de trigonometrie in praktijk te brengen en 2e aan het ontbreken van een goedkope schooltafel. De buitenlandse tafels, die wij in de praktijk gebruiken, zijn zeer duur.

Deze laatste oorzaak is echter sinds kort weggevallen en nu kom ik aan *het tweede* van de beide feiten, die ik aan het begin noemde. In talrijke periodieken is de nieuwe Nederlandse tafelverzameling, in decimale verdeling en met vijf decimalen, van *Wijdenes,* getiteld *Five Place Tables,* aangekondigd. De titel en het korte voorbericht zijn, uit commerciële overwegingen vermoed ik, in het Engels gesteld; voor het overige is de cijfertaal gelukkig internationaal. De landmeetkundige *praktijk* vereist in het algemeen een tafel in zes decimalen, maar voor het onderwijs heb ik de nieuwe tafel van Wijdenes in een uitvoerige beoordeling in het *Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde* en in *Euclides uitstekend* kunnen noemen. Deze tafel (prijs *f* 2.50) bevat:

I. Gewone logarithmen;
II. Logarithmen van de goniometrische functies;
III. Natuurlijke waarden van de goniometrische functies.

Verder de nodige hulptafels en een tafel ter bepaling van de oppervlakte van een cirkelsegment uit gegeven pijl en koorde; kortom *alles* wat de leerling nodig heeft.

Ik merk nog op, dat de tafel van de natuurlijke waarden voor de praktijk het belangrijkst is, omdat wij, nu ons rekenmachines ter beschikking staan, zo goed als nooit meer met logarithmen werken.

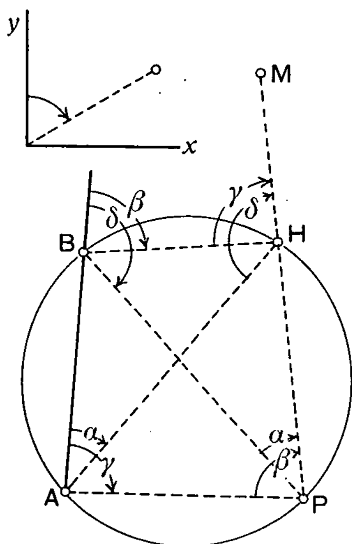
Deze tafelverzameling maakt thans de algemene invoering van de decimale verdeling bij het onderwijs mogelijk, zodat dit niet langer bij de praktijk in dit opzicht behoeft achter te blijven.

NASCHRIFT.

Als vervolg op het artikel van den Heer Harkink nemen we het onderstaande op; dit is van de hand van Prof. J. M. Tienstra, hoogleeraar in Delft; het is een antwoord op mijn vraag, hoe men in de practijk „Snellius" toepast; het antwoord dateert van Mei 1937. Het leek me gewenst het nu op te nemen. De formulieren zijn gedrukt; geschreven zijn alleen alle cijfers; de berekeningen zijn gemaakt met de decimale tafel. Over de „methode Collins" zullen we de lezers wel eens inlichten. Men lette vooral op, dat de vakken (notatie als bij de determinanten) (2,1), (3,1) en (4,1) op blz. 224 en (1,3) en (3,3) op blz. 223, hoeken bevatten in decimale graden. W.

ALGEMENE OPMERKING.

De richting van een halve rechte wordt uitgaande van de Y-as rechtsom geteld van 0—400 gr. Algemeen is dus voor de coördinatenverschillen van twee punten P en Q,



$$X_P - X_Q = l_{QP} \sin \overline{QP}$$
$$Y_P - Y_Q = l_{QP} \cos \overline{QP}$$

(l_{QP} is de afstand en $\overline{QP}$ is de hoek met de positieve Y-as van de gerichte verbindingslijn QP).

Notatie in formulieren:

X_p en Y_p zijn de rechthoekige coördinaten.

$\overline{AB}$ is de hoek met de Y-as van de gerichte verbindingslijn AB.

AB is de afstand van de punten A en B.

$(\overline{AB})$ is de niet georiënteerde richting van de gerichte verbindingslijn AB.

Bij het vraagstuk van Snellius worden de hoeken in het onbekende punt P meestal bepaald door de verschillen van de niet georiënteerde richtingen naar de 3 bekende punten A, B en M; in de figuur de richtingen $(\overline{PA})$, $(\overline{PB})$ en $(\overline{PM})$. Deze worden

verkregen door aflezing op de horizontale rand van een theodoliet, welke rand t.o.v. de asrichtingen van het coördinatensysteem een willekeurige stand inneemt. Oriënteren van een bundel richtingen wil zeggen: „goed" leggen van de bundel t.o.v. de noordrichting en van de richting van de positieve Y-as.

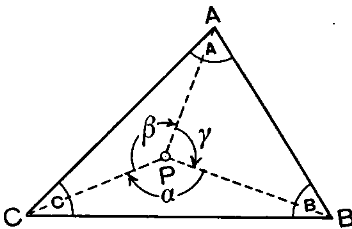
Oplossingsmethode van het problema van Snellius volgens de methode „Collins". Trek de cirkel door A, B en P. H is het hulppunt van Collins. Omdat hoek α ook bij A en hoek β ook bij B voorkomt, zijn de coördinaten van H te berekenen uit die van A en B. Nu is de hoek met de Y-as van HM, dus ook van PM, te vinden en dus zijn ook de hoeken γ en δ bekend. Uit △ ABP zijn nu de coördinaten van P te berekenen.

Het formulier op blz. 223 volgt deze berekeningsgang en is algemeen, d.w.z. voor elke ligging der punten P, A, B, M, geldig. (Letten op tekens natuurlijk).

Verder zijn op de berekening controles aangebracht, die in het formulier verwerkt zijn.

De methode is de beste voor logarithmische berekening.

Methode bij gebruik van de rekenmachine.



A, B en C gegeven punten. P gevraagd; α, β en γ zijn de verschillen van de in P gemeten richtingen:

$(\overline{PB})$, $(\overline{PC})$ en $(\overline{PA})$.

$$X_p = \frac{u_1 X_A + u_2 X_B + u_3 X_C}{u_1 + u_2 + u_3} \qquad Y_p = \frac{u_1 Y_A + u_2 Y_B + u_3 Y_C}{u_1 + u_2 + u_3}$$

u_1, u_2, u_3 barycentrische coördinaten van P in △ ABC.

$$u_1 : \frac{1}{\text{cotg } A - \text{cotg } \alpha} = u_2 : \frac{1}{\text{cotg } B - \text{cotg } \beta} = u_3 : \frac{1}{\text{cotg } C - \text{cotg } \gamma}$$

Deze methode heb ik in 1926 gepubliceerd in „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde". Later bleek mij dat de Zwitser Ansermet mij voor was geweest. Het formulier op blz. 224 is weer algemeen geldig.

Berekening van de coördinaten van het punt: 27.

A: Veenwouden I; B: Hardegarijp; M: Rinsumageest.

				$(\overline{PM})$	217,8811
				$(\overline{PB})$	76,3234
				$(\overline{PA})$	0,0000
X_b	+ 37226,21	Y_b	+ 18393,18	$\alpha = (\overline{PM}) - (\overline{PB})$	141,5577
X_a	+ 40349,18	Y_a	+ 20794,29	$\beta = (\overline{PM}) - (\overline{PA})$	217,8811
$X_h - X_b$	+ 3126,10	$Y_h - Y_b$	+ 1229,00	$\overline{AB}$	258,272
$X_h - X_a$	+ 3,13	$Y_h - Y_a$	— 1172,10	$\overline{AH} = \overline{AB} + \alpha$	399,830
X_h	+ 40352,31	Y_h	+ 19622,19	$\overline{BH} = \overline{AB} + \beta$	76,153
$X_b - X_a$	— 3122,97	$Y_b - Y_a$	— 2401,11	$\beta - \alpha$	76,323

Logarithmen.

m	3,62618	m	3,62618	$X_b - X_a$	3,49457n
sin a	$\overline{1}$,90003	sin β	$\overline{1}$,44278n	sin $\overline{AB}$	$\overline{1}$,89914n
BH	3,52621	AH	3,06896n	$Y_b - Y_a$	3,38041n
sin $\overline{BH}$	$\overline{1}$,96879	sin $\overline{AH}$	$\overline{3}$,42657n	cos $\overline{AB}$	$\overline{1}$,78499n
$X_h - X_b$	3,49500	$X_h - X_a$	0,49553	AB	3,59543
BH	3,52621	AH	3,06896n	sin $(\beta - \alpha)$	$\overline{1}$,96925
cos $\overline{BH}$	$\overline{1}$,56335	cos $\overline{AH}$	0,00000	m	3,62618
$Y_h - Y_b$	3,08956	$Y_h - Y_a$	3,06896n	tg $\overline{AB}$	0,11416

X_m	+ 37043,55	Y_m	+ 27086,76	$\overline{PM} = \overline{HM}$	373,4380
X_h	+ 40352,31	Y_h	+ 19622,19	$\overline{HB}$	276,153
$X_m - X_h$	— 3308,76	$Y_m - Y_h$	+ 7464,57	$\overline{HA}$	199,830
X_b	+ 37226,21	Y_b	+ 18393,18	$\gamma = \overline{HM} - \overline{HB}$	97,285
$X_p - X_b$	+ 2028,20	$Y_p - Y_b$	+ 3705,90	$\delta = \overline{HM} - \overline{HA}$	173,608
X_a	+ 40349,18	Y_a	+ 20794,29	$\overline{AB}$	258,272
$X_p - X_a$	— 1094,70	$Y_p - Y_a$	+ 1304,70	$\overline{AP} = \overline{AB} + \gamma$	355,557
X_p	+ 39254,48	Y_p	+ 22098,99	$\overline{BP} = \overline{AB} + \delta$	31,880
				$\overline{BP} - \overline{AP}$	76,323

Logarithmen.

m	3,62618	m	3,62618	$X_m - X_h$	3,51967n
sin γ	$\overline{1}$,99961	sin δ	$\overline{1}$,60508	$Y_m - Y_h$	3,87301
BP	3,62579	AP	3,23126	tg $\overline{HM}$	$\overline{1}$,64666n
sin $\overline{BP}$	$\overline{1}$,68138	sin $\overline{AP}$	$\overline{1}$,80805n		
$X_p - X_b$	3,30712	$X_p - X_a$	3,03931n		
BP	3,62579	AP	3,23126		
cos $\overline{BP}$	$\overline{1}$,94311	cos $\overline{AP}$	$\overline{1}$,88426		
$Y_p - Y_b$	3,56890	$Y_p - Y_a$	3,11552		

$$(\overline{PB}) - (\overline{PA}) = \overline{BH} - \overline{AH}$$

$$= \overline{BP} - \overline{AP} = \delta - \gamma = \beta - \alpha$$

Berekening van de coördinaten van een punt P uit 3 gemeten richtingen $(\overline{PA})$, $(\overline{PB})$ en $(\overline{PC})$ naar de punten A, B en C.

A: Veenwouden I		u_1	+ 1,69159	X_a	+ 40349,18	Y_a	+ 20794,29
B: Hardegarijp		u_2	+ 0,23797	X_b	+ 37226,21	Y_b	+ 18393,18
C: Rinsumageest		u_3	+ 0,61932	X_c	+ 37043,55	Y_c	+ 27086,76
P: 27		$[u]$	+ 2,54888	$X_p = \frac{[uX]}{[u]}$	+ 39254,42	$Y_p = \frac{[uY]}{[u]}$	+ 22099,04
$(\overline{PC})$	217,881	cot A	— 0,17346	$x_1 = X_b - X_c$	+ 182,66	$y_1 = Y_b - Y_c$	— 8693,58
$(\overline{PB})$	76,323	cot α	— 0,76462	$x_2 = X_c - X_a$	— 3305,63	$y_2 = Y_c - Y_a$	+ 6292,47
α	141,558	$1 : u_1$	+ 0,59116	$x_3 = X_a - X_b$	+ 3122,97	$y_3 = Y_a - Y_b$	+ 2401,11
$(\overline{PA})$	0,000	cot B	+ 0,73595	$2O = x_1y_2 - x_2y_1 = x_2y_3 - x_3y_2 = -275884 \times 10^2$			
$(\overline{PC})$	217,881	cot β	— 3,46620				
β	182,119	$1 : u_2$	+ 4,20215				
$(\overline{PB})$	76,323	cot C	+ 2,00475				
$(\overline{PA})$	0,000	cot γ	+ 0,39007				
γ	76,323	$1 : u_3$	+ 1,61468				

cot $A = (x_2x_3 + y_2y_3) : 2O$

cot $B = (x_3x_1 + y_3y_1) : 2O$

cot $C = (x_1x_2 + y_1y_2) : 2O$

Controles: $[x] = 0 \quad [y] = 0$

$\alpha + \beta + \gamma = 400^g$

cot B cot C + cot C cot A + + cot A cot B = 1

cot β cot γ + cot γ cot α + + cot α cot β = 1